

Учреждение образования
«Белорусский государственный технологический университет»

**Конспект лекций по дисциплине
«Динамика машин и виброзащита».**

Для студентов III курса специальности:
1-36 07 01 «Машины и аппараты химических производств и предприятий
строительных материалов».

Лектор: доцент Грода Я.Г.

Минск, БГТУ
2015 г.

Тема 1. Лекция 1. Динамика жестких систем

Описание реальных механизмов с учетом всех их особенностей представляет собой очень сложную проблему, поэтому при теоретическом исследовании используются идеализированные модели, дающие возможность учесть основные детали конструкции в приближенной (упрощенной) форме. С этой точки зрения механические системы можно разделить на две категории: жесткие и упругие.

В первом случае элементы (звенья), составляющие систему, считаются абсолютно твердыми, т.е. недеформирующимися под действием сил или моментов. Поскольку деформации звеньев, как правило, малы по сравнению с размерами машин, решение многих задач динамики будет при этом мало отличаться от точного. Но даже считая все звенья абсолютно твердыми, не удастся избавиться от всех трудностей, поскольку только системы с круглыми дисками описываются достаточно простыми линейными уравнениями, а системы, в состав которых входят массивные стержни, описываются уже нелинейными дифференциальными уравнениями, теория которых далека от завершения.

С еще большими трудностями приходится сталкиваться при описании упругих систем, когда все элементы машин, передающие движение, а также несущие части считаются упругими (деформируемыми). Даже с учетом того, что деформации являются не слишком большими и не проявляются гистерезисные эффекты, число степеней свободы в таких системах оказывается бесконечным и их динамическое поведение определяется уравнениями, находящимися далеко за рамками нашего курса. К вопросу о том, как поступать в данном случае, мы вернемся позже, а сначала сосредоточимся на рассмотрении жестких систем.

1.1 Уравнения движения механизмов с жесткими звеньями

Динамическое поведение систем, состоящих из абсолютно твердых тел, описывается двумя группами уравнений, одна из которых имеет векторный характер (теоремы о движении центра масс и изменении момента импульса, принцип Даламбера), а вторая – скалярный (теорема об изменении кинетической энергии, общее уравнение динамики, уравнения Лагранжа второго рода). В уравнения первой группы так или иначе входят реакции связей, наложенных на систему, уравнения второй группы реакций связей (идеальных) не содержат, так что они непосредственно и определяют уравнения движения – связь между действующими активными силами и соответствующими ускорениями.

Задачи динамики жестких систем заключаются в том, чтобы по заданным силам или моментам определить закон движения системы или по заданному закону движения определить силы, под действием которых оно происходит. Поэтому применение тех или иных уравнений и диктуется стоящими перед исследователем вопросами. В данном курсе мы будем использовать уравнения Ла-

гранжа, имея в виду их наибольшую общность в получении уравнений движения для систем с произвольным числом степеней свободы.

Начнем с простейшего случая системы с одной степенью свободы, для которой необходимо только одно уравнение Лагранжа

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial T}{\partial q} = Q, \quad (1.1.1)$$

где q и \dot{q} – обобщенные координата и обобщенная скорость соответственно, T – кинетическая энергия системы

$$T = \sum_k \frac{m_k v_k^2}{2}, \quad (1.1.2)$$

Q – обобщенная сила, определяемая соотношением

$$Q = \sum_k \vec{F}_k \cdot \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q}. \quad (1.1.3)$$

Здесь \vec{F}_k – сила, действующая на систему в точке, радиус-вектор которой равен \vec{r}_k . В практических приложениях, однако, определением (1.1.3) пользуются редко, обобщенную силу проще найти, сообщив системе возможное перемещение и вычислив работу всех сил на этом перемещении. Выразив затем все перемещения через изменение обобщенной координаты, получим обобщенную силу как коэффициент при этом изменении

$$\delta A = \sum_k \vec{F}_k \cdot \delta \vec{r}_k = Q \delta q. \quad (1.1.4)$$

Кинетическую энергию при этом необходимо выразить через обобщенные переменные. Положение каждой точки определяется, с одной стороны, радиусом-вектором \vec{r}_k , а с другой, положение любой точки определяется и обобщенной координатой, следовательно, радиус-вектор должен быть функцией этой обобщенной координаты. Считая, что на систему наложены стационарные связи, эту зависимость можно записать в виде

$$\vec{r}_k = \vec{r}_k(q), \quad (1.1.5)$$

тогда скорость точки, равная производной от радиуса-вектора по времени, выразится через обобщенную скорость с помощью соотношения

$$\vec{v}_k = \frac{d\vec{r}_k}{dt} = \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q} \dot{q}. \quad (1.1.6)$$

Подставим это выражение в определение кинетической энергии (1.1.2):

$$T = \frac{1}{2} \sum_k m_k \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q} \cdot \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q} \dot{q}^2 = \frac{1}{2} m(q) \dot{q}^2. \quad (1.1.7)$$

Здесь введено обозначение

$$m(q) = \sum_k m_k \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q} \cdot \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q} \quad (1.1.8)$$

для так называемого инерционного коэффициента, который характеризует распределение масс в системе и зависит от обобщенной координаты, если связь (1.1.5) не является линейной. Имея в распоряжении кинетическую энергию (1.1.7), выраженную через обобщенные координаты и скорости, вычислим производные, входящие в уравнение Лагранжа (1.1.1):

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}} = m(q) \dot{q}, \quad (1.1.9)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}} \right) = \frac{dm(q)}{dq} \dot{q}^2 + m(q) \ddot{q}, \quad (1.1.10)$$

$$\frac{\partial T}{\partial q} = \frac{1}{2} \frac{dm(q)}{dq} \dot{q}^2. \quad (1.1.11)$$

Подставив (1.1.9)–(1.1.11) в (1.1.1), получим

$$m(q) \ddot{q} + \frac{1}{2} \frac{dm(q)}{dq} \dot{q}^2 = Q. \quad (1.1.12)$$

Таким образом, уравнение Лагранжа (1.1.1) после выполнения предусмотренных операций превратилось в дифференциальное уравнение второго порядка, что вполне естественно, поскольку все динамические уравнения в конечном счете являются именно таковыми. В общем случае уравнение (1.1.12) нелинейно.

В качестве примера составления уравнения движения рассмотрим один из самых распространенных механизмов, использующийся, например, в поршневых компрессорах, механических прессах, – кривошипно-ползунный, представленный на рис.1. Он состоит из двух однородных стержней 1 и 2, длины которых l_1 и l_2 , и ползуна 3, массы их равны m_1 , m_2 и m_3 соответственно. На кривошип 1, который может вращаться вокруг неподвижной оси, проходящей через т. О, действует пара сил, момент которой равен M , на ползун 3, движущийся поступательно внутри цилиндра, действует сила \vec{F} , шатун 2 при этом совершает плоское движение. Кинетическая энергия такой системы равна

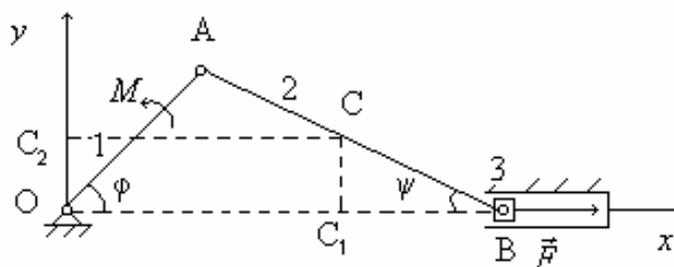


Рис. 1

сумме кинетических энергий этих трех тел

$$T = T_1 + T_2 + T_3, \quad (1.1.13)$$

причем

$$T_1 = \frac{1}{2} I_1 \omega_1^2, \quad (1.1.14)$$

$$T_2 = \frac{1}{2} m_2 v_C^2 + \frac{1}{2} I_C \omega_2^2, \quad (1.1.15)$$

$$T_3 = \frac{1}{2} m_3 v_3^2. \quad (1.1.16)$$

Механизм имеет одну степень свободы. В качестве обобщенной координаты выберем угол поворота кривошипа 1, т.е. положим $q = \varphi$. Все скорости, фигурирующие в (1.1.14)–(1.1.16), нужно выразить через обобщенную скорость, которой в данном случае будет угловая скорость кривошипа: $\dot{q} = \dot{\varphi} = \omega_1$. Проще всего это можно сделать в координатной форме. Из рисунка видно, что

$$x_C = l_1 \cos \varphi + \frac{1}{2} l_2 \cos \psi, \quad (1.1.17)$$

$$y_C = \frac{1}{2} l_2 \sin \psi, \quad (1.1.18)$$

$$x_3 = l_1 \cos \varphi + l_2 \cos \psi, \quad (1.1.19)$$

поэтому проекции скорости центра масс звена 2 на оси равны

$$\dot{x}_C = -l_1 \dot{\varphi} \sin \varphi - \frac{1}{2} l_2 \dot{\psi} \sin \psi, \quad (1.1.20)$$

$$\dot{y}_C = \frac{1}{2} l_2 \dot{\psi} \cos \psi, \quad (1.1.21)$$

а скорость ползуна определяется выражением

$$\dot{x}_3 = -l_1 \dot{\phi} \sin \phi - l_2 \dot{\psi} \sin \psi, \quad (1.1.22)$$

что дает возможность написать

$$v_C^2 = \dot{x}_C^2 + \dot{y}_C^2 = l_1^2 \dot{\phi}^2 \sin^2 \phi + l_1 l_2 \dot{\phi} \dot{\psi} \sin \phi \sin \psi + \frac{1}{4} l_2^2 \dot{\psi}^2, \quad (1.1.23)$$

$$v_3^2 = \dot{x}_3^2 = l_1^2 \dot{\phi}^2 \sin^2 \phi + l_2^2 \dot{\psi}^2 \sin^2 \psi + 2 l_1 l_2 \dot{\phi} \dot{\psi} \sin \phi \sin \psi. \quad (1.1.24)$$

Угловая скорость шатуна определяется производной по времени от угла ψ :

$$\omega_2 = \dot{\psi}. \quad (1.1.25)$$

Теперь остается только выразить угол ψ через ϕ . Это можно сделать с помощью теоремы синусов, в соответствии с которой

$$\frac{l_1}{\sin \psi} = \frac{l_2}{\sin \phi},$$

откуда следует

$$\sin \psi = \frac{l_1}{l_2} \sin \phi \quad (1.1.26)$$

и, следовательно,

$$\dot{\psi} \cos \psi = \frac{l_1}{l_2} \dot{\phi} \cos \phi, \quad (1.1.27)$$

или при учете (1.1.26)

$$\dot{\psi} = \dot{\phi} \frac{l_1 \cos \phi}{l_2 \sqrt{1 - \sin^2 \psi}} = \dot{\phi} \frac{l_1 \cos \phi}{l_2 \sqrt{1 - \frac{l_1^2}{l_2^2} \sin^2 \phi}} = \dot{\phi} \frac{l_1 \cos \phi}{\sqrt{l_2^2 - l_1^2 \sin^2 \phi}}. \quad (1.1.28)$$

Подставив (1.1.23)-(1.1.25) с учетом (1.1.26),(1.1.28) в (1.1.14)-(1.1.16) и затем в (1.1.13), получим выражение для кинетической энергии

$$\begin{aligned}
T &= \frac{\omega_1^2}{2} \left\{ I_1 + m_2 l_1^2 \left(\sin^2 \varphi + \frac{l_1 \sin^2 \varphi \cos \varphi}{\sqrt{l_2^2 - l_1^2 \sin^2 \varphi}} + \frac{l_2^2 \cos^2 \varphi}{4(l_2^2 - l_1^2 \sin^2 \varphi)} \right) + \right. \\
&+ I_C \frac{l_1^2 \cos^2 \varphi}{l_2^2 - l_1^2 \sin^2 \varphi} + m_3 l_1^2 \left(\sin^2 \varphi + \frac{l_1^2 \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi}{l_2^2 - l_1^2 \sin^2 \varphi} + \frac{2l_1 \sin^2 \varphi \cos \varphi}{\sqrt{l_2^2 - l_1^2 \sin^2 \varphi}} \right) \left. \right\} = \\
&= \frac{\omega_1^2}{2} \left\{ I_1 + (m_2 + m_3) l_1^2 \sin^2 \varphi + \frac{l_1^2 \cos^2 \varphi (m_2 l_2^2 + 3m_3 l_1^2 \sin^2 \varphi)}{3(l_2^2 - l_1^2 \sin^2 \varphi)} + \right. \\
&\left. + \frac{(m_2 + 2m_3) l_1^2 \sin^2 \varphi \cos \varphi}{\sqrt{l_2^2 - l_1^2 \sin^2 \varphi}} \right\}. \tag{1.1.29}
\end{aligned}$$

Здесь было использовано выражение для момента инерции стержня 2 относительно оси, проходящей через его центр масс, т.е.

$$I_C = \frac{m_2 l_2^2}{12}.$$

Сравнение выражения (1.1.29) с (1.1.7) показывает, что инерционный коэффициент $m(\varphi)$ в данном случае равен множителю в последних фигурных скобках и имеет размерность момента инерции (его еще называют приведенным моментом инерции). Производная от него по обобщенной координате будет иметь весьма громоздкий вид, поэтому упростим задачу, считая кривошип и шатун одинаковыми стержнями, т.е. положим $m_1 = m_2 = m$, $l_1 = l_2 = l$. Тогда

$$m(\varphi) = \frac{2}{3} ml^2 + 2(m + 2m_3) l^2 \sin^2 \varphi \tag{1.1.30}$$

и

$$m'(\varphi) = 2(m + 2m_3) l^2 \sin 2\varphi. \tag{1.1.31}$$

Теперь определим обобщенную силу. Для этого нужно сообщить системе возможное перемещение и найти работу всех активных сил на этом перемещении. Для простоты будем считать, что механизм расположен в горизонтальной плоскости – это снимет вопрос о работе сил тяжести. При этом необходимо придерживаться правила: выбор направления возможного перемещения должен быть таким, чтобы работа движущих сил была положительной. Будем считать таковой вращающий момент M , тогда возможным перемещением кривошипа будет поворот на угол $\delta\varphi$ против хода часовой стрелки. Работа активных сил будет равна

$$\delta A = M \delta \varphi + \vec{F} \cdot \delta \vec{r}_3 = M \delta \varphi + F_x \delta x_3. \quad (1.1.32)$$

Воспользовавшись формулой (1.1.19), которая в рассматриваемом упрощенном случае принимает вид

$$x_3 = 2l \cos \varphi,$$

получим

$$\delta x_3 = -2l \sin \varphi \delta \varphi,$$

что после подстановки в (1.1.32) дает

$$\delta A = (M - 2Fl \sin \varphi) \delta \varphi.$$

Коэффициент при $\delta \varphi$ в последнем выражении и есть обобщенная сила:

$$Q = M - 2Fl \sin \varphi. \quad (1.1.33)$$

Подставив (1.1.30), (1.1.31) и (1.1.33) в (1.1.12), получим уравнение движения кривошипно-ползунного механизма

$$\left[\frac{2}{3} ml^2 + 2(m + 2m_3)l^2 \sin^2 \varphi \right] \ddot{\varphi} + (m + 2m_3)l^2 \dot{\varphi}^2 \sin 2\varphi = M - 2Fl \sin \varphi. \quad (1.1.34)$$

Как видим, даже в простейшем случае уравнение, описывающее динамическое поведение механизма, является нелинейным независимо от того, что представляют собой силовые факторы M и F , а они, вообще говоря, могут быть функциями φ и $\dot{\varphi}$.

1.2 Решение уравнений динамики жестких систем в простейших случаях

Ранее было установлено, что уравнение движения системы с одной степенью свободы имеет вид

$$m(q)\ddot{q} + \frac{1}{2} \frac{dm(q)}{dq} \dot{q}^2 = Q. \quad (1.2.1)$$

При наличии в системе стержней (а это - скорее правило, чем исключение) оно является нелинейным и его аналитическое решение возможно только в исключительных случаях. При невозможности отыскания аналитического решения, даже приближенного, следует обращаться к численным методам, реализуемым с помощью вычислительной техники, которые позволяют решать урав-

нения произвольной сложности. Имея все-таки в виду аналитические возможности, рассмотрим простейшие варианты, так называемые интегрируемые случаи, считая инерционный коэффициент постоянной величиной, которую в дальнейшем будем обозначать просто буквой m . Тогда второе слагаемое в (1.2.1) выпадает, и уравнение приобретает существенно более простой вид

$$m\ddot{q} = Q. \quad (1.2.2)$$

Обобщенная сила при этом может зависеть от t , q , \dot{q} или их комбинации.

1) Простейшим является случай постоянной силы: $Q = \text{const}$ (гиревой привод, например). Для сокращения записи обозначим

$$a = \frac{Q}{m}. \quad (1.2.3)$$

Уравнение (1.2.2) тогда примет вид

$$\ddot{q} = a. \quad (1.2.4)$$

Решением дифференциального уравнения, как известно, является функция, подстановка которой в уравнение обращает его в тождество. Процесс нахождения такой функции называется интегрированием дифференциального уравнения и для каждого типа дифференциального уравнения этот процесс реализуется по-своему. Есть, однако, способ, применимый к весьма широкому кругу задач динамики, который называется методом разделения переменных. Его идея очень проста. Интеграл представляет собой выражение вида

$$\int f(x)dx, \quad (1.2.5)$$

поэтому нужно представить обе части дифференциального уравнения в виде функции какой-то переменной, умноженной на дифференциал этой же переменной, что и позволит выполнить интегрирование. Но для этого уравнение второго порядка нужно свести сначала к системе двух уравнений первого порядка. Введем новую переменную

$$\frac{dq}{dt} = v, \quad (1.2.6)$$

тогда уравнение (1.2.4) примет вид

$$\frac{dv}{dt} = a. \quad (1.2.7)$$

Система двух уравнений первого порядка (1.2.6), (1.2.7) эквивалентна уравнению второго порядка (1.2.4) и в них возможно разделение переменных. Умножим обе части уравнения (1.2.7) на dt :

$$dv = a dt . \quad (1.2.8)$$

Обе части полученного уравнения имеют вид подынтегрального выражения (1.2.5) , поэтому

$$\int dv = \int a dt = a \int dt$$

и, следовательно,

$$v = at + C_1, \quad (1.2.9)$$

где C_1 - произвольная постоянная. Подставим теперь (1.2.9) в (1.2.6):

$$\frac{dq}{dt} = at + C_1. \quad (1.2.10)$$

Переменные опять разделяются путем умножения обеих частей на dt

$$dq = (at + C_1)dt \quad (1.2.11)$$

и в результате интегрирования

$$\int dq = \int (at + C_1)$$

получаем закон движения

$$q = \frac{at^2}{2} + C_1t + C_2. \quad (1.2.12)$$

Это – хорошо известный закон равноускоренного движения. В таком виде, однако, он не представляет какого-либо интереса, поскольку содержит две произвольные постоянные. Физический смысл имеют решения, удовлетворяющие заданным начальным условиям. Для уравнений второго порядка, каковыми являются все динамические уравнения, необходимо задать положение и скорость в начальный момент времени (его всегда можно считать нулевым), т.е. задать состояние системы в начальный момент времени

$$q(0) = q_0, \quad \dot{q}(0) = v_0 \quad (1.2.13)$$

и потребовать, чтобы в начальный момент времени выражения (1.2.9) и (1.2.12) принимали значения (1.2.13). В этом случае задача имеет единственное решение. Нетрудно видеть, что это требование приводит к тому, что

$$C_1 = v_0, \quad C_2 = q_0,$$

поэтому частное решение уравнения (1.2.4), удовлетворяющее начальным условиям (1.2.13), приобретает вид

$$q = \frac{at^2}{2} + v_0t + q_0. \quad (1.2.14)$$

Следует отметить, что только в случае равноускоренного движения произвольные постоянные имеют такой простой физический смысл.

2) Движение под действием сил, зависящих от времени: $Q = Q(t)$. Обозначим $a(t) = Q(t)/m$, опять введем новую переменную

$$\frac{dq}{dt} = v, \quad (1.2.15)$$

в результате чего уравнение (1.2.4) примет вид

$$\frac{dv}{dt} = a(t). \quad (1.2.16)$$

Разделив в нем переменные и выполнив интегрирование, получим

$$v = \int a(t)dt + C_1 = f_1(t) + C_1, \quad (1.2.17)$$

где вид функции $f_1(t)$ может быть определен после задания конкретного вида $Q(t)$. Подстановка выражения для скорости в (1.2.15), разделение переменных и интегрирование приводит к следующему:

$$q = \int f_1(t)dt + C_1t + C_2. \quad (1.2.18)$$

Постоянные интегрирования, разумеется, должны быть определены по начальным условиям.

3) Движение под действием сил, зависящих от положения: $Q = Q(q)$. Обозначив через $a(q) = Q(q)/m$, получим тем же способом, что и выше

$$\frac{dq}{dt} = v, \quad (1.2.19)$$

$$\frac{dv}{dt} = a(q). \quad (1.2.20)$$

В этом случае ускорение не зависит явно от времени, а только через q , такая же зависимость должна быть и у скорости, т.е. она должна рассматриваться как сложная функция времени и поэтому

$$\frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dq} \frac{dq}{dt} = \frac{dv}{dq} v, \quad (1.2.21)$$

в результате чего уравнение (1.2.20) принимает вид

$$v \frac{dv}{dq} = a(q), \quad (1.2.22)$$

переменные в котором разделяются, а интегрирование после этого дает

$$\frac{v^2}{2} = \int a(q) dq + C_1 = f(q) + C_1, \quad (1.2.23)$$

где через f обозначен фигурирующий слева интеграл. Из последнего соотношения следует

$$v = \pm \sqrt{2(f(q) + C_1)} \quad (1.2.24)$$

и тогда

$$\frac{dq}{dt} = \pm \sqrt{2(f(q) + C_1)}, \quad (1.2.25)$$

т.е. переменные опять разделяются и поэтому

$$\pm \int \frac{dq}{\sqrt{2(f(q) + C_1)}} = t + C_2. \quad (1.2.26)$$

Неоднозначность, обусловленная извлечением квадратного корня в (1.2.24), снимается в каждом конкретном случае определенными физическими соображениями. Обратив соотношение (1.2.26), получим зависимость координаты от времени:

$$q = f_1(t, C_1, C_2). \quad (1.2.27)$$

4) Движение под действием сил, зависящих от скорости: $Q = Q(\dot{q})$. Уравнение (1.2.4) в этом случае эквивалентно системе

$$\frac{dq}{dt} = v, \quad (1.2.28)$$

$$\frac{dv}{dt} = a(v), \quad (1.2.29)$$

где обозначено $a(v) = Q(v)/m$. Переменные разделяются в уравнении (1.2.29) путем деления обеих частей на a и умножения на dt . Интегрирование полученного выражения дает

$$t = \int \frac{dv}{a(v)} + C_1 = f(v, C_1), \quad (1.2.30)$$

откуда следует

$$v = f^{-1}(t, C_1), \quad (1.2.31)$$

где f^{-1} - функция, обратная f . Подстановка (1.2.31) в (1.2.28) приводит к уравнению с разделяющимися переменными, решение которого определяет закон движения

$$q = \int f^{-1}(t, C_1) dt + C_2. \quad (1.2.32)$$

Некоторые примеры применения рассмотренных способов решения дифференциальных уравнений приведены ниже.

Тема 2. Лекции 2 и 3. Динамика упругих систем.

На предыдущих лекциях были рассмотрены жесткие системы, которые, как уже отмечалось, являются определенной идеализацией реальных, т. е. деформируемых систем. В некоторых случаях приближения абсолютно твердых систем вполне достаточно для выяснения качественных и даже количественных характеристик. Но существует множество ситуаций, когда с помощью такого приближения нельзя объяснить динамическое поведение устройства, и поэтому необходимо учитывать упругие свойства системы. При этом возникают серьезные проблемы, связанные с бесконечным числом степеней свободы таких систем, рассмотрение которых выходит далеко за рамки нашего курса. Однако в зависимости от характера изучаемого явления и требуемого уровня строгости можно ограничить число учитываемых степеней свободы, выбирая в качестве расчетной схемы реальной конструкции систему с конечным числом степеней свободы или даже одной.

Ограничение числа учитываемых в расчете степеней свободы может быть выполнено различными способами. Часто в реальной конструкции можно выделить массивные элементы, деформацией которых можно пренебречь, и упругие элементы с малыми массами. Пренебрежение этими массами снимает необходимость рассмотрения проблем динамики упругих тел. В этом случае расчетная схема представляет собой ряд жестких массивных тел, соединенных невесомыми упругими связями.

При этом только в простейших случаях потенциальная энергия упругих сил (даже в случае справедливости закона Гука) оказывается квадратичной по параметрам, определяющим положение системы, в общем же случае зависимость оказывается иной, что приводит к нелинейным уравнениям. Наиболее удобным средством для получения уравнений движения таких систем являются уравнения Лагранжа второго рода

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\alpha} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_\alpha} = - \frac{\partial U}{\partial q_\alpha} + Q_\alpha, \quad (\alpha = 1, 2, \dots, s), \quad (2.1)$$

где T и U – кинетическая и потенциальная энергии системы, Q_α – непотенциальные обобщенные силы, q_α – обобщенные координаты, \dot{q}_α – обобщенные скорости, s – число степеней свободы.

2.1 Малые колебания консервативной системы около положения устойчивого равновесия

Консервативная система, т.е. система, на которую действуют только потенциальные силы, описывается уравнениями вида (2.1) без последнего слагаемого:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\alpha} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_\alpha} = - \frac{\partial U}{\partial q_\alpha}. \quad (2.1.1)$$

Напомним, что если есть такие значения обобщенных координат q_α^0 , при которых все производные от потенциальной энергии равны нулю

$$\left. \frac{\partial U}{\partial q_\alpha} \right|_{q_\alpha=q_\alpha^0} = 0 \quad (\alpha=1,2,\dots,s), \quad (2.1.2)$$

то такое положение системы называется равновесным. Если это положение равновесия является устойчивым, то при малых отклонениях q_α от q_α^0 и малых скоростях \dot{q}_α система будет совершать колебательное движение вблизи этого устойчивого положения равновесия. Достаточное условие устойчивости положения равновесия определяется теоремой Лагранжа-Дирихле: если в положении равновесия консервативной системы с идеальными и стационарными связями потенциальная энергия имеет изолированный минимум, то такое положение равновесия является устойчивым.

В случае системы с одной степенью свободы это означает

$$\left. \frac{\partial U}{\partial q} \right|_{q=q^0} = 0, \quad \left. \frac{\partial^2 U}{\partial q^2} \right|_{q=q^0} > 0, \quad (2.1.3)$$

для систем с несколькими степенями свободы критерий устойчивости имеет более сложный вид. Без ограничения общности будем считать, что $q_\alpha^0 = 0$ и $U(0) = 0$ (выбор нулевой точки потенциальной энергии всегда позволяет это сделать).

2.2 Свободные колебания системы с одной степенью свободы

Рассмотрим сначала наиболее простой случай свободных колебаний механической системы с одной степенью свободы, который описывается уравнением, полученным в конце предыдущей лекции:

$$m\ddot{q} + cq = 0. \quad (2.2.1)$$

В данном случае индексы у инерционного и квазиупругого коэффициентов опущены.

Уравнение (2.2.1) можно использовать для описания, например, поведения машинного агрегата на упругом фундаменте, представленном на рис. 12, части формовочной машины и т. д.

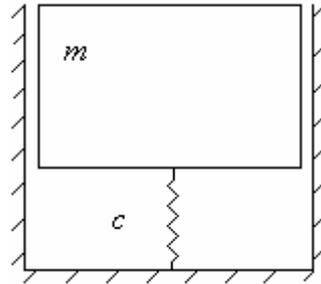


Рис. 12

Запишем это уравнение в стандартной форме, разделив обе части на m и введя обозначение

$$k^2 = \frac{c}{m}, \quad (2.2.2)$$

что можно сделать, поскольку коэффициенты m и c положительны:

$$\ddot{q} + k^2 q = 0. \quad (2.2.3)$$

Это однородное линейное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами. Его решение будем искать в виде

$$q = Ce^{\lambda t}, \quad (2.2.4)$$

где C и λ – постоянные величины, подлежащие определению. Решением уравнения является то, что обращает его в тождество, поэтому подставим (2.2.4) в (2.2.3), учтя при этом, что

$$\dot{q} = C\lambda e^{\lambda t}, \quad \ddot{q} = C\lambda^2 e^{\lambda t},$$

в результате чего получим

$$C(\lambda^2 + k^2)e^{\lambda t} = 0. \quad (2.2.5)$$

Последнее равенство выполняется тождественно, т. е. для любого значения t , если

$$\lambda^2 + k^2 = 0. \quad (2.2.6)$$

Коэффициент C не может равняться нулю, поскольку тривиальные (нулевые) решения однородного уравнения нас не интересуют.

Алгебраическое уравнение (2.2.6) называется характеристическим уравнением дифференциального уравнения (2.2.3), и оно имеет мнимые корни

$$\lambda_1 = ik, \quad \lambda_2 = -ik, \quad (2.2.7)$$

которым соответствуют два решения

$$q_1 = C_1 e^{\lambda_1 t} = C_1 e^{ikt}, \quad (2.2.8)$$

$$q_2 = C_2 e^{\lambda_2 t} = C_2 e^{-ikt}. \quad (2.2.9)$$

Эти решения линейно независимы, т.к. их отношение не является константой, и, как известно, общим решением уравнения (2.2.3) в этом случае должна быть их линейная комбинация:

$$q = C_1 e^{ikt} + C_2 e^{-ikt}. \quad (2.2.10)$$

Только на первый взгляд правая часть этого выражения выглядит как комплексная и содержит четыре произвольные постоянные, на самом деле, поскольку q – величина действительная, она должна удовлетворять условию вещественности $q = q^*$, откуда следует, что

$$C_2 = C_1^*, \quad (2.2.11)$$

т. е. решение (2.2.10) содержит только две произвольные постоянные, как и должно быть в случае дифференциального уравнения второго порядка. Запишем это в явном виде, воспользовавшись известными формулами Эйлера

$$e^{\pm i\alpha} = \cos \alpha \pm i \sin \alpha. \quad (2.2.12)$$

Тогда

$$\begin{aligned} q &= C_1(\cos kt + i \sin kt) + C_2(\cos kt - i \sin kt) = \\ &= (C_1 + C_2) \cos kt + i(C_1 - C_2) \sin kt = A \cos kt + B \sin kt, \end{aligned} \quad (2.2.13)$$

где введены новые произвольные постоянные

$$A = C_1 + C_2, \quad B = i(C_1 - C_2), \quad (2.2.14)$$

которые являются вещественными в силу (2.2.11). Решение уравнения (2.2.3) можно представить еще в одной форме, введя две новые произвольные постоянные l и δ с помощью соотношений

$$A = l \sin \delta, \quad (2.2.15)$$

$$B = l \cos \delta. \quad (2.2.16)$$

Подставив последние равенства в (2.2.13), получим

$$q = l \sin \delta \cos kt + l \cos \delta \sin kt = l \sin(kt + \delta). \quad (2.2.17)$$

Таким образом, закон движения системы с одной степенью свободы при малых отклонениях от положения равновесия описывается периодической функцией и, следовательно, движение имеет колебательный характер. Аргумент тригонометрической функции $kt + \delta$ называется фазой колебаний, величина δ – начальной фазой, k – циклическая частота, определяющая число колебаний за 2π секунд, а l – амплитуда колебаний – наибольшее отклонение от положения равновесия. Величины l и δ определяются начальными условиями

$$q(0) = q_0, \quad (2.2.18)$$

$$\dot{q}(0) = v_0. \quad (2.2.19)$$

Продифференцировав (2.2.17) по времени, получим

$$\dot{q} = lk \cos(kt + \delta), \quad (2.2.20)$$

поэтому

$$q_0 = l \sin \delta, \quad (2.2.21)$$

$$v_0 = lk \cos \delta. \quad (2.2.22)$$

Отсюда следует, что начальная фаза и амплитуда определяются как свойствами системы через параметр k , так и начальными данными

$$\operatorname{tg} \delta = \frac{q_0 k}{v_0}, \quad (2.2.23)$$

$$l = \sqrt{q_0^2 + \frac{v_0^2}{k^2}}. \quad (2.2.24)$$

Период колебаний

$$\Theta = \frac{2\pi}{k} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{c}} \quad (2.2.25)$$

определяется только свойствами системы. График таких колебаний представлен на рис. 13.

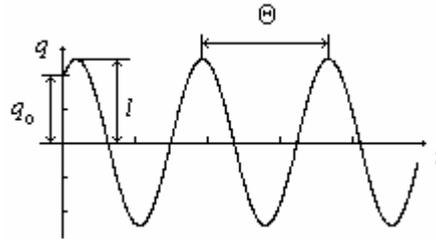


Рис. 13

Вычислим механическую энергию E при свободных колебаниях. Она, как известно, определяется суммой кинетической и потенциальной энергий, т. е.

$$E = T + U = \frac{1}{2}m\dot{q}^2 + \frac{1}{2}cq^2. \quad (2.2.26)$$

Подставив сюда (2.2.17) и (2.2.20), будем иметь

$$E = \frac{1}{2}ml^2k^2 \cos^2(kt + \delta) + \frac{1}{2}cl^2 \sin^2(kt + \delta) = \frac{1}{2}cl^2, \quad (2.2.27)$$

поскольку $mk^2 = c$ в силу определения (2.2.2). Как и должно быть, полная механическая энергия в консервативной системе сохраняется, и она оказывается пропорциональной квадрату амплитуды колебаний.

Для качественного изучения общей картины движения системы очень полезным является введение в рассмотрение так называемой фазовой плоскости (q, \dot{q}) , в которой строятся кривые – фазовые траектории, графически отражающие зависимость между обобщенными координатой и скоростью системы для всего многообразия интегральных кривых.

Имея в виду (2.2.17) и (2.2.20), получим

$$\frac{q^2}{l^2} + \frac{\dot{q}^2}{(kl)^2} = 1, \quad (2.2.28)$$

что представляет собой уравнение эллипса, точнее, семейства эллипсов, отвечающих тем или иным начальным условиям, изображенных на рис. 14.

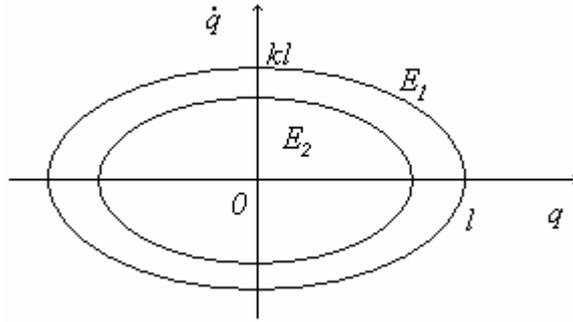


Рис. 14. $E_1 > E_2$.

В силу (2.2.27) каждая кривая совпадает с поверхностью уровня полной механической энергии E . Семейство эллипсов возникает из-за различных начальных условий. Для всех эллипсов отношение полуосей одно и то же: $kl/l = k$, т. е. равно частоте собственных колебаний. Замкнутость фазовых траекторий свидетельствует о периодичности движения.

Покою системы в положении ее устойчивого равновесия соответствует начало координат фазовой плоскости ($q = 0$, $\dot{q} = 0$). При уменьшении полной энергии, т. е. при уменьшении q_0 и v_0 , фазовые траектории стягиваются к началу координат.

В данном простом примере для нахождения уравнения фазовой траектории использовался закон движения (2.2.17), в более сложных случаях закон движения может быть и неизвестен и, тем не менее, уравнение фазовой траектории может быть определено непосредственно с помощью закона сохранения энергии

$$E = \frac{1}{2}m(q)\dot{q}^2 + U(q) = const, \quad (2.2.29)$$

который в самой общей форме устанавливает связь между обобщенными координатой и скоростью, и в рассматривавшемся случае имеет вид (2.2.26).

Неустойчивое равновесие определяется отрицательным значением квазиупругого коэффициента: $c < 0$. В тех же предположениях, что и выше, полная энергия системы имела бы вид

$$E = \frac{1}{2}m\dot{q}^2 - \frac{1}{2}|c|q^2 \quad (2.2.30)$$

и, следовательно,

$$\frac{m\dot{q}^2}{2E} - \frac{|c|q^2}{2E} = 1, \quad (2.2.31)$$

т. е. уравнением фазовой траектории была бы гипербола, которая, как известно, не является замкнутой – система все в большей степени отклонялась бы от положения неустойчивого равновесия. Тот же результат вытекает и из рассмотрения уравнения движения, которое в данном случае имеет вид

$$m\ddot{q} = -cq = |c|q, \quad (2.2.32)$$

или

$$m\ddot{q} - |c|q = 0, \quad (2.2.33)$$

откуда

$$\ddot{q} - k^2q = 0, \quad (2.2.34)$$

где $k^2 = \frac{|c|}{m}$.

Уравнение (2.2.34) отличается от (2.2.3) лишь знаком при втором слагаемом, но решение его меняется радикально. Решение однородного линейного уравнения опять ищем в экспоненциальной форме (2.2.4), подстановка которой в (2.2.34) приводит к характеристическому уравнению

$$\lambda^2 - k^2 = 0, \quad (2.2.35)$$

имеющему действительные корни $\lambda = \pm k$, поэтому общее решение уравнения (2.2.34) должно иметь вид

$$q = C_1 e^{kt} + C_2 e^{-kt}, \quad (2.2.36)$$

т. е. обобщенная координата экспоненциально растет со временем: никакой периодичности нет.

2.3 Вынужденные колебания системы с одной степенью свободы

Будем считать, что на систему, рассмотренную на предыдущей лекции, действует еще зависящая от времени сила $F(t)$ (рис. 15).

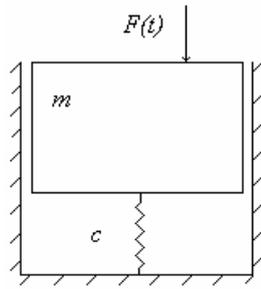


Рис. 15

Уравнение движения будет тогда иметь вид

$$m\ddot{q} = -cq + F(t). \quad (2.3.1)$$

Разделим все слагаемые на коэффициент при ускорении и введем обозначения

$$k^2 = \frac{c}{m}, \quad f(t) = \frac{F(t)}{m}. \quad (2.3.2)$$

Тогда уравнение (2.3.1) можно записать так:

$$\ddot{q} + k^2q = f(t). \quad (2.3.3)$$

Общее решение неоднородного линейного уравнения (2.3.3) равно сумме общего решения соответствующего однородного уравнения и частного решения неоднородного

$$q = q_1 + q_2, \quad (2.3.4)$$

где q_1 удовлетворяет уравнению

$$\ddot{q}_1 + k^2q_1 = 0. \quad (2.3.5)$$

Общее решение однородного уравнения было найдено ранее, и оно имеет вид

$$q_1 = A \cos kt + B \sin kt. \quad (2.3.6)$$

Частное решение q_2 можно найти с помощью метода вариации произвольных постоянных, т. е. в виде (2.3.6), но с коэффициентами, зависящими от времени:

$$q_2 = C(t) \cos kt + D(t) \sin kt. \quad (2.3.7)$$

Для нахождения функций C и D последнее выражение нужно подставить в (2.3.3). Вычислим сначала первую производную по времени

$$\dot{q}_2 = \dot{C} \cos kt + \dot{D} \sin kt + k(-C \sin kt + D \cos kt). \quad (2.3.8)$$

Поскольку введены две неизвестные функции, а уравнение (2.3.3) только одно, необходимо наложить на эти функции дополнительное условие. Положим

$$\dot{C} \cos kt + \dot{D} \sin kt = 0. \quad (2.3.9)$$

Тогда

$$\ddot{q}_2 = k(-\dot{C} \sin kt + \dot{D} \cos kt) - k^2(C \cos kt + D \sin kt). \quad (2.3.10)$$

Подставив (2.3.7) и (2.3.10) в (2.3.3), будем иметь

$$k(-\dot{C} \sin kt + \dot{D} \cos kt) - k^2(C \cos kt + D \sin kt) + k^2(C \cos kt + D \sin kt) = f(t). \quad (2.3.11)$$

Слагаемые, содержащие множитель k^2 , взаимно уничтожаются, в результате чего

$$k(-\dot{C} \sin kt + \dot{D} \cos kt) = f(t). \quad (2.3.12)$$

Таким образом, получена система двух уравнений (2.3.9) и (2.3.10) для двух неизвестных функций C и D . Запишем ее в стандартной форме

$$\dot{C} \cos kt + \dot{D} \sin kt = 0, \quad (2.3.13)$$

$$-\dot{C} \sin kt + \dot{D} \cos kt = \frac{1}{k} f(t). \quad (2.3.14)$$

Определитель этой системы равен

$$\Delta = \begin{vmatrix} \cos kt & \sin kt \\ -\sin kt & \cos kt \end{vmatrix} = \cos^2 kt + \sin^2 kt = 1, \quad (2.3.15)$$

поэтому

$$\dot{C} = \frac{1}{\Delta} \begin{vmatrix} 0 & \sin kt \\ \frac{1}{k} f(t) & \cos kt \end{vmatrix} = -\frac{1}{k} f(t) \sin kt, \quad (2.3.16)$$

$$\dot{D} = \frac{1}{\Delta} \begin{vmatrix} \cos kt & 0 \\ -\sin kt & \frac{1}{k} f(t) \end{vmatrix} = \frac{1}{k} f(t) \cos kt. \quad (2.3.17)$$

В обоих дифференциальных уравнениях (2.3.16) и (2.3.17) переменные отделяются, так что их решения находятся простым интегрированием:

$$C(t) = -\frac{1}{k} \int_0^t f(\tau) \sin k\tau d\tau, \quad (2.3.18)$$

$$D(t) = \frac{1}{k} \int_0^t f(\tau) \cos k\tau d\tau. \quad (2.3.19)$$

Подставив эти выражения в (2.3.7), получим частное решение неоднородного уравнения (2.3.3) в следующем виде:

$$\begin{aligned} q_2 &= -\frac{1}{k} \cos kt \int_0^t f(\tau) \sin k\tau d\tau + \frac{1}{k} \sin kt \int_0^t f(\tau) \cos k\tau d\tau = \\ &= \frac{1}{k} \int_0^t f(\tau) (\sin kt \cos k\tau - \cos kt \sin k\tau) d\tau = \frac{1}{k} \int_0^t f(\tau) \sin k(t - \tau) d\tau. \end{aligned} \quad (2.3.20)$$

Нетрудно убедиться в том, что q_2 удовлетворяет нулевым начальным условиям. Действительно, $q_2(0) = 0$ в силу равенства пределов интегрирования в (2.3.20). Для вычисления производной по времени от q_2 нужно воспользоваться правилом дифференцирования интеграла с переменными пределами

$$\frac{d}{dt} \int_{a(t)}^{b(t)} f(t, y) dy = f(t, b) \frac{db}{dt} - f(t, a) \frac{da}{dt} + \int_{a(t)}^{b(t)} \frac{\partial f(t, y)}{\partial t} dy. \quad (2.3.21)$$

В нашем случае $a=0$, поэтому второе слагаемое в (2.3.21) обращается в нуль, $b=t$, $f(t) \sin(t-t) = 0$, т. е. первое слагаемое тоже равно нулю, в результате чего получим

$$\dot{q}_2 = \int_0^t f(\tau) \cos k(t - \tau) d\tau$$

и, следовательно, $\dot{q}_2(0) = 0$ опять из-за равенства пределов интегрирования.

Итак, общее решение уравнения (2.3.3) имеет вид

$$q = A \cos kt + B \sin kt + \frac{1}{k} \int_0^t f(\tau) \sin k(t - \tau) d\tau. \quad (2.3.22)$$

Постоянные A и B определяются начальными условиями: $A = q_0$, $B = \frac{\dot{q}_0}{k}$.

2.4 Гармоническая возмущающая сила

Рассмотрим случай, когда возмущающая сила зависит от времени по простому гармоническому закону, например,

$$F(t) = H \sin pt . \quad (2.4.1)$$

Уравнение (2.3.3) при этом примет вид

$$\ddot{q} + k^2 q = \frac{H}{m} \sin pt . \quad (2.4.2)$$

Частное решение этого уравнения всегда можно получить с помощью формулы (2.3.20), однако в данном случае такой подход нельзя назвать наилучшим, поскольку он связан с довольно громоздкими преобразованиями подынтегрального выражения; к нему мы будем обращаться тогда, когда другие, более простые средства не позволят добиться результата.

Попытаемся сначала определить частное решение в таком же виде, как и (2.4.1), т. е. положим

$$q_2 = C \sin pt , \quad (2.4.3)$$

где C – неизвестная постоянная. Подставим это выражение в уравнение (2.4.2):

$$-Cp^2 \sin pt + k^2 C \sin pt = \frac{H}{m} \sin pt .$$

Это выражение обратится в тождество, если коэффициенты при синусах в правой и левой частях окажутся одинаковыми. Следовательно,

$$C = \frac{H}{m(k^2 - p^2)} , \quad (2.4.4)$$

и общее решение имеет вид

$$q = A \cos kt + B \sin kt + \frac{H}{m(k^2 - p^2)} \sin pt , \quad (2.4.5)$$

т. е. движение системы представляет собой наложение двух колебаний с разными частотами. Два первых слагаемых соответствуют свободным колебаниям с собственной частотой k , последнее слагаемое описывает вынужденное колебание, частота которого равна частоте возмущающей силы, а амплитуда

$$|C| = \frac{H}{m|k^2 - p^2|} \quad (2.4.6)$$

не зависит от начальных условий. При $p < k$ вынужденные колебания совпадают по фазе с возмущающей силой, а при $p > k$ они находятся с ней в противофазе.

Для определения произвольных постоянных A и B найдем выражение для скорости, продифференцировав (2.4.5) по времени:

$$\dot{q} = -Ak \sin kt + Bk \cos kt + Cp \cos pt. \quad (2.4.7)$$

Тогда

$$q_0 = A,$$

$$v_0 = Bk + Cp,$$

откуда следует

$$B = \frac{v_0 - Cp}{k},$$

и поэтому

$$q = q_0 \cos kt + \frac{v_0 - Cp}{k} \sin kt + C \sin pt. \quad (2.4.8)$$

Из этого выражения следует, что даже при нулевых начальных условиях $q_0 = 0$, $v_0 = 0$ в колебательном движении системы будет присутствовать составляющая с собственной частотой k

$$q = C \left(\sin pt - \frac{p}{k} \sin kt \right),$$

причем амплитуда этих колебаний никак не связана с начальными условиями.

Рассмотрим амплитуду вынужденных колебаний подробнее. Представим выражение (2.4.6) в виде

$$|C| = \frac{H}{mk^2 \left| 1 - \frac{p^2}{k^2} \right|} = \frac{H}{c \left| 1 - \frac{p^2}{k^2} \right|} = \frac{H\gamma}{c}, \quad (2.4.9)$$

где величина H/c представляет собой статическое отклонение от положения равновесия под действием постоянной силы, равной максимальному значению возмущающей силы H , а

$$\gamma = \frac{1}{\left|1 - \frac{p^2}{k^2}\right|} \quad (2.4.10)$$

- коэффициент динамичности, показывающий, насколько амплитуда вынужденных колебаний превосходит статическое отклонение. Зависимость этого коэффициента от частоты возмущающей силы (точнее, от безразмерной частоты $z=p/k$) представлена на рис. 16.

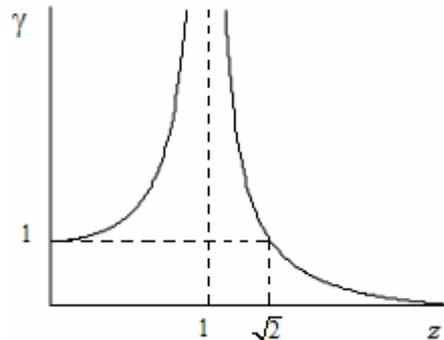


Рис. 16.

Видно, что при малых z параметр γ близок к единице, т.е. вынуждающая сила по своему характеру близка к постоянной величине, при больших z γ и, следовательно, амплитуда вынужденных колебаний малы (система не успевает реагировать на высокочастотное воздействие). Коэффициент γ и амплитуда вынужденных колебаний становятся большими, когда частота вынуждающей силы близка к собственной частоте системы, а при их совпадении (при резонансе) обращаются в бесконечность. Разумеется, никаких бесконечностей в реальных системах быть не может – дефект содержится в виде полученного решения.

Частное решение уравнения (2.4.2) в случае резонанса, т.е. при $p = k$, будем определять с помощью формулы (2.3.20), которая при указанном условии и учете (2.4.1) примет вид

$$q_2 = \frac{H}{mk} \int_0^t \sin k\tau \sin k(t - \tau) d\tau. \quad (2.4.11)$$

Интегралы такого вида часто встречаются при рассмотрении колебательных процессов и их можно вычислять либо интегрированием по частям, либо преобразованием подынтегрального выражения таким образом, чтобы оно содержало суммы или разности тригонометрических функций. Воспользуемся вторым способом, имея в виду, что

$$\sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{2} [\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)].$$

Положив $\alpha = k\tau$, $\beta = k(t - \tau)$, получим

$$\sin k\tau \sin k(t - \tau) = \frac{1}{2} [\cos(2k\tau - kt) - \cos(kt)].$$

Подставим последнее выражение в (33):

$$\begin{aligned} q_2 &= \frac{H}{2mk} \int_0^t [\cos(2k\tau - kt) - \cos kt] d\tau = \\ &= \frac{H}{2mk} \left\{ \frac{1}{2k} \sin(2k\tau - kt) \Big|_0^t - t \cos kt \right\} = \frac{H}{2mk} \left(\frac{1}{k} \sin kt - t \cos kt \right). \end{aligned} \quad (2.4.12)$$

Общее решение, таким образом, примет вид

$$q = A \cos kt + B \sin kt + \frac{H}{2mk} \left(\frac{1}{k} \sin kt - t \cos kt \right), \quad (2.4.13)$$

т.е. при резонансе система колеблется с собственной частотой, размахи колебаний остаются конечными, хотя и растут пропорционально времени из-за последнего слагаемого в (2.4.13) (так называемого секулярного члена, делающего движение неперриодическим). Такое поведение представлено на рис. 17.

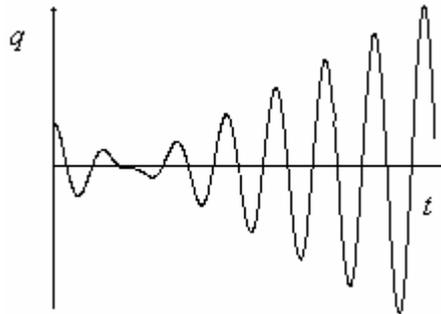


Рис. 17

Нагрузка на упругий элемент при этом становится очень значительной. Хотя расходимости нет, все же такое существенное нарастание колебаний возможно лишь в рассматриваемой идеализированной системе при отсутствии потерь.

2.5 Вынужденные колебания при учете сил вязкого сопротивления

Рассмотрим модель машины на упругом основании с подключенным демпфером, характеризуемым коэффициентом μ , на которую действует пере-

менная сила $F(t)$, рис. 20. Как и ранее, такая система имеет одну степень свободы.

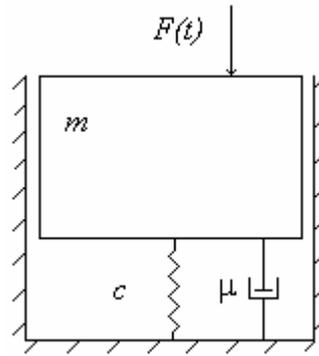


Рис. 20

Для такого случая функция Релея приобретает вид

$$\Phi = \frac{1}{2} B_{11}(q) \dot{q}^2 = \frac{1}{2} \mu(q) \dot{q}^2, \quad (2.5.1)$$

где для краткости обозначено $\mu = B_{11}$.

При рассмотрении малых отклонений от положения равновесия диссипативную функцию нужно вычислять с той же точностью, что и потенциальную и кинетическую энергии, поэтому в разложении коэффициента сопротивления необходимо ограничиться только первым членом, т.е.

$$\mu(q) = \mu(0) + \left. \frac{d\mu}{dq} \right|_{q=0} q + \dots \approx \mu(0) \equiv \mu > 0. \quad (2.5.2)$$

Уравнение Лагранжа (2.6.11) для случая одной степени свободы несколько упрощается

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial T}{\partial q} = - \frac{\partial U}{\partial q} - \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{q}} + F(t), \quad (2.5.3)$$

поэтому в рассматриваемом приближении (2.5.2) уравнение движения будет иметь вид

$$m \ddot{q} = -c q - \mu \dot{q} + F(t). \quad (2.5.4)$$

Приведем его к стандартной форме, перенеся члены, содержащие q и \dot{q} , в левую часть и разделив все слагаемые на m . При этом введем обозначения

$$k^2 = \frac{c}{m}, \quad 2b = \frac{\mu}{m}, \quad f(t) = \frac{F(t)}{m}. \quad (2.5.5)$$

Тогда будем иметь

$$\ddot{q} + 2b\dot{q} + k^2q = f(t). \quad (2.5.6)$$

Общее решение этого линейного неоднородного уравнения, как обычно, представляется суммой общего решения q_1 соответствующего однородного уравнения

$$\ddot{q}_1 + 2b\dot{q}_1 + k^2q_1 = 0 \quad (2.5.7)$$

и частного решения уравнения (2.5.6).

Найдем сначала общее решение уравнения (2.5.7). Оно должно иметь экспоненциальную форму

$$q_1 = Ce^{\lambda t} \quad (2.5.8)$$

с неизвестными постоянными параметрами C и λ . Они определяются так, чтобы функция (2.5.8) обращала уравнение (2.5.7) в тождество. Подставив ее в (2.5.7), получим

$$C(\lambda^2 + 2b\lambda + k^2)e^{\lambda t} = 0,$$

откуда следует, что параметр λ подчиняется квадратному уравнению (характеристическому уравнению)

$$\lambda^2 + 2b\lambda + k^2 = 0, \quad (2.5.9)$$

решение которого имеет вид

$$\lambda = -b \pm \sqrt{b^2 - k^2}, \quad (2.5.10)$$

т.е. оно определяется соотношением между упругой силой и силой сопротивления, которые характеризуются коэффициентами k и b соответственно, как это видно из определений (2.5.5).

В случае малого сопротивления, когда $b < k$, корни характеристического уравнения оказываются комплексными

$$\lambda_1 = -b + i\Omega, \quad \lambda_2 = -b - i\Omega, \quad \Omega = \sqrt{k^2 - b^2}, \quad (2.5.11)$$

вследствие чего общее решение уравнения (2.5.7) является линейной комбинацией выражений (2.5.8), которую можно представить в эквивалентных формах

$$\begin{aligned} q_1 &= C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t} = C_1 e^{(-b+i\Omega)t} + C_2 e^{(-b-i\Omega)t} = \\ &= e^{-bt} (C_1 e^{i\Omega t} + C_2 e^{-i\Omega t}) = e^{-bt} (A \cos \Omega t + B \sin \Omega t) = \end{aligned}$$

$$= le^{-bt} \sin(\Omega t + \delta), \quad (2.5.12)$$

каждая из которых описывает так называемые затухающие колебания, поскольку из (2.5.12) видно, что решение однородного уравнения при учете сил сопротивления описывает колебательный процесс с экспоненциально убывающей со временем амплитудой. Их общий вид представлен на рис. 21.

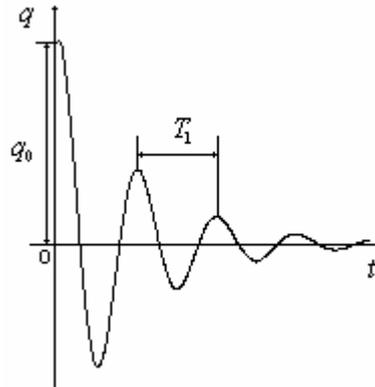


Рис. 21

Быстрота убывания размахов определяется коэффициентом b , который связан с коэффициентом сопротивления μ вторым из соотношений (2.5.5). Величина $T_1 = 2\pi/\Omega$ называется периодом затухающих колебаний, хотя функция, определяемая равенством (2.5.12), конечно, не является периодической.

В случае большого сопротивления $b > k$ корни характеристического уравнения (2.5.10) действительны, причем оба отрицательны:

$$\lambda_1 = -b + \sqrt{b^2 - k^2} < 0, \quad \lambda_2 = -b - \sqrt{b^2 - k^2} < 0. \quad (2.5.13)$$

Тогда общее решение однородного уравнения имеет вид

$$q_1 = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t} = C_1 e^{-|\lambda_1|t} + C_2 e^{-|\lambda_2|t}, \quad (2.5.14)$$

т.е. оно не имеет вообще никаких признаков периодичности, экспоненциально убывая со временем, почему и носит название аperiodического. Характерное поведение такой функции в зависимости от разных начальных условий представлено на рис. 22.

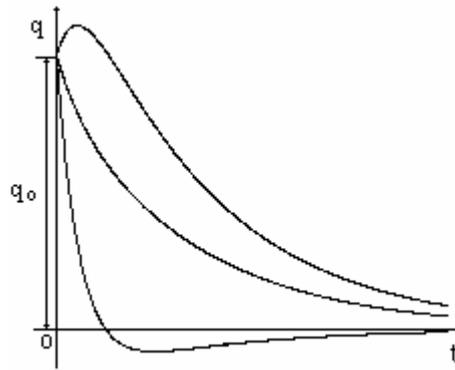


Рис. 22

Вполне понятно, что на процессы, длящиеся достаточно долго, рассмотренные свободные колебания сколько-нибудь существенного влияния не оказывают.

Теперь займемся поиском частного решения уравнения (2.5.6). Воспользуемся при этом опять методом вариации произвольных постоянных, т.е. решение будем искать в виде

$$q_2 = A(t)e^{\lambda_1 t} + B(t)e^{\lambda_2 t}, \quad (2.5.15)$$

где λ_1 и λ_2 - корни характеристического уравнения (2.5.9), а A и B - неизвестные функции. Для их определения подставим последнее выражение в (2.5.6). Сначала вычислим первую производную

$$\dot{q}_2 = \dot{A}e^{\lambda_1 t} + \dot{B}e^{\lambda_2 t} + A\lambda_1 e^{\lambda_1 t} + B\lambda_2 e^{\lambda_2 t} \quad (2.5.16)$$

и на искомые две функции наложим дополнительное условие

$$\dot{A}e^{\lambda_1 t} + \dot{B}e^{\lambda_2 t} = 0. \quad (2.5.17)$$

Тогда

$$\ddot{q}_2 = \dot{A}\lambda_1 e^{\lambda_1 t} + \dot{B}\lambda_2 e^{\lambda_2 t} + A\lambda_1^2 e^{\lambda_1 t} + B\lambda_2^2 e^{\lambda_2 t}. \quad (2.5.18)$$

Теперь подставим (2.5.16) и (2.5.18) с учетом (2.5.17) в (2.5.6):

$$\begin{aligned} & \dot{A}\lambda_1 e^{\lambda_1 t} + \dot{B}\lambda_2 e^{\lambda_2 t} + A\lambda_1^2 e^{\lambda_1 t} + B\lambda_2^2 e^{\lambda_2 t} + 2b(A\lambda_1 e^{\lambda_1 t} + B\lambda_2 e^{\lambda_2 t}) + \\ & + k^2(Ae^{\lambda_1 t} + Be^{\lambda_2 t}) = f(t). \end{aligned} \quad (2.5.19)$$

Сгруппируем слагаемые, содержащие множители A и B , т.е. все члены в левой части, начиная с третьего. Тогда окажется, что

$$A(\lambda_1^2 + 2b\lambda_1 + k^2)e^{\lambda_1 t} + B(\lambda_2^2 + 2b\lambda_2 + k^2)e^{\lambda_2 t} = 0$$

из-за того, что λ_1 и λ_2 являются корнями характеристического уравнения (2.5.9), и поэтому равенство (2.5.19) превратится в следующее:

$$\dot{A}\lambda_1 e^{\lambda_1 t} + \dot{B}\lambda_2 e^{\lambda_2 t} = f(t). \quad (2.5.20)$$

Присоединив к нему равенство (2.5.17), получим систему двух дифференциальных уравнений для двух функций A и B . Сначала разрешим эту систему относительно производных. Определитель системы (2.5.17), (2.5.19) равен

$$\Delta = \begin{vmatrix} e^{\lambda_1 t} & e^{\lambda_2 t} \\ \lambda_1 e^{\lambda_1 t} & \lambda_2 e^{\lambda_2 t} \end{vmatrix} = \lambda_2 e^{(\lambda_1 + \lambda_2)t} - \lambda_1 e^{(\lambda_1 + \lambda_2)t} = (\lambda_2 - \lambda_1) e^{(\lambda_1 + \lambda_2)t}, \quad (2.5.21)$$

поэтому

$$\dot{A} = \frac{1}{\Delta} \begin{vmatrix} 0 & e^{\lambda_2 t} \\ f(t) & \lambda_2 e^{\lambda_2 t} \end{vmatrix} = -\frac{f(t)e^{\lambda_2 t}}{\Delta} = -\frac{f(t)e^{\lambda_2 t}}{(\lambda_2 - \lambda_1)e^{(\lambda_1 + \lambda_2)t}} = \frac{f(t)e^{-\lambda_1 t}}{\lambda_1 - \lambda_2}, \quad (2.5.22)$$

$$\dot{B} = \frac{1}{\Delta} \begin{vmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 \\ \lambda_1 e^{\lambda_1 t} & f(t) \end{vmatrix} = \frac{f(t)e^{\lambda_1 t}}{\Delta} = \frac{f(t)e^{\lambda_1 t}}{(\lambda_2 - \lambda_1)e^{(\lambda_1 + \lambda_2)t}} = \frac{f(t)e^{-\lambda_2 t}}{\lambda_2 - \lambda_1}. \quad (2.5.23)$$

Искомые функции найдем в виде интегралов с переменным верхним пределом:

$$A = \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} \int_0^t f(\tau) e^{-\lambda_1 \tau} d\tau, \quad (2.5.24)$$

$$B = \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1} \int_0^t f(\tau) e^{-\lambda_2 \tau} d\tau. \quad (2.5.25)$$

Подставив эти выражения в (2.5.15), получим частное решение неоднородного уравнения в виде

$$q_2 = \frac{e^{\lambda_1 t}}{\lambda_1 - \lambda_2} \int_0^t f(\tau) e^{-\lambda_1 \tau} d\tau + \frac{e^{\lambda_2 t}}{\lambda_2 - \lambda_1} \int_0^t f(\tau) e^{-\lambda_2 \tau} d\tau,$$

или

$$q_2 = \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} \int_0^t f(\tau) [e^{\lambda_1(t-\tau)} - e^{\lambda_2(t-\tau)}] d\tau. \quad (2.5.26)$$

В случае малого сопротивления корни характеристического уравнения определяются равенствами (2.5.11), поэтому $\lambda_1 - \lambda_2 = 2i\Omega$ и частное решение приобретает вид

$$\begin{aligned}
q_2 &= \frac{1}{2i\Omega} \int_0^t f(\tau) \left[e^{(-b+i\Omega)(t-\tau)} - e^{-(b+i\Omega)(t-\tau)} \right] d\tau = \\
&= \frac{1}{2i\Omega} \int_0^t f(\tau) e^{-b(t-\tau)} \left[e^{i\Omega(t-\tau)} - e^{-i\Omega(t-\tau)} \right] d\tau = \\
&= \frac{1}{\Omega} \int_0^t f(\tau) e^{-b(t-\tau)} \sin \Omega(t-\tau) d\tau.
\end{aligned} \tag{2.5.27}$$

В случае большого сопротивления оба корня действительные и отрицательные, так что частное решение остается в виде (2.5.26) с экспоненциально убывающим множителем под знаком интеграла.

В качестве возмущающей силы опять рассмотрим гармонически изменяющуюся величину

$$F(t) = H \sin pt. \tag{2.5.28}$$

Проведенный выше анализ показал, что свободные колебания при учете сил сопротивления быстро затухают, так что невыясненным осталось только поведение частного решения. Оно может быть получено непосредственно с помощью формул (2.5.26) или (2.5.27). Будем пользоваться первым из этих выражений, которое годится для любого сопротивления. После подстановки в него возмущающей силы (2.5.28) оно примет вид

$$q_2 = \frac{h}{\lambda_1 - \lambda_2} \int_0^t \left[e^{\lambda_1(t-\tau)} - e^{\lambda_2(t-\tau)} \right] \sin p\tau d\tau. \tag{2.5.29}$$

Рассмотрим интеграл

$$I_1 = \int_0^t e^{-\lambda_1\tau} \sin p\tau d\tau. \tag{2.5.30}$$

Такого вида интегралы можно вычислить интегрированием по частям:

$$\begin{aligned}
I_1 &= -\frac{1}{\lambda_1} e^{-\lambda_1\tau} \sin p\tau \Big|_0^t + \frac{p}{\lambda_1} \int_0^t e^{-\lambda_1\tau} \cos p\tau d\tau = -\frac{1}{\lambda_1} e^{-\lambda_1 t} \sin pt - \\
&- \frac{p}{\lambda_1^2} e^{-\lambda_1\tau} \cos p\tau \Big|_0^t - \frac{p^2}{\lambda_1^2} \int_0^t e^{-\lambda_1\tau} \sin p\tau d\tau =
\end{aligned}$$

$$= -\frac{1}{\lambda_1} e^{-\lambda_1 t} \sin pt - \frac{p}{\lambda_1^2} (e^{-\lambda_1 t} \cos pt - 1) - \frac{p^2}{\lambda_1^2} I_1. \quad (2.5.31)$$

Перенесем последнее слагаемое в левую часть, после чего получим

$$\begin{aligned} I_1 &= -\frac{1}{1 + \frac{p^2}{\lambda_1^2}} \left[\frac{1}{\lambda_1} e^{-\lambda_1 t} \sin pt + \frac{p}{\lambda_1^2} (e^{-\lambda_1 t} \cos pt - 1) \right] = \\ &= -\frac{1}{\lambda_1^2 + p^2} \left[\lambda_1 e^{-\lambda_1 t} \sin pt + p(e^{-\lambda_1 t} \cos pt - 1) \right]. \end{aligned} \quad (2.5.32)$$

В выражении (2.5.29) фигурирует комбинация $e^{\lambda_1 t} I_1$, которая в соответствии с (2.5.32) равна

$$e^{\lambda_1 t} I_1 = -\frac{1}{\lambda_1^2 + p^2} \left[\lambda_1 \sin pt + p(\cos pt - e^{\lambda_1 t}) \right]. \quad (2.5.33)$$

Второй интеграл в (2.5.29) теперь можно записать сразу, поменяв в (2.5.33) индексы с единицы на двойку:

$$e^{\lambda_2 t} I_2 = -\frac{1}{\lambda_2^2 + p^2} \left[\lambda_2 \sin pt + p(\cos pt - e^{\lambda_2 t}) \right]. \quad (2.5.34)$$

Тогда

$$\begin{aligned} q_2 &= \frac{h}{\lambda_1 - \lambda_2} (e^{\lambda_1 t} I_1 - e^{\lambda_2 t} I_2) = \frac{h}{\lambda_1 - \lambda_2} \left\{ \frac{1}{\lambda_2^2 + p^2} \left[\lambda_2 \sin pt + p(\cos pt - e^{\lambda_2 t}) \right] - \right. \\ &\left. - \frac{1}{\lambda_1^2 + p^2} \left[\lambda_1 \sin pt + p(\cos pt - e^{\lambda_1 t}) \right] \right\}. \end{aligned} \quad (2.5.35)$$

Далее,

$$\begin{aligned} q_2 &= \frac{h}{\lambda_1 - \lambda_2} \left\{ \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_2^2 + p^2} - \frac{\lambda_1}{\lambda_1^2 + p^2} \right) \sin pt + p \left(\frac{1}{\lambda_2^2 + p^2} - \frac{1}{\lambda_1^2 + p^2} \right) \cos pt + \right. \\ &\left. + p \left(\frac{e^{\lambda_1 t}}{\lambda_1^2 + p^2} - \frac{e^{\lambda_2 t}}{\lambda_2^2 + p^2} \right) \right\}. \end{aligned} \quad (2.5.36)$$

В этом выражении можно пренебречь последней скобкой, поскольку она экспоненциально стремится к нулю. Тогда

$$\begin{aligned}
 q_2 = & \frac{h}{(\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_1^2 + p^2)(\lambda_2^2 + p^2)} \{ (\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_1\lambda_2 - p^2) \sin pt + \\
 & + p(\lambda_1^2 - \lambda_2^2) \cos pt \} = \frac{h}{(\lambda_1^2 + p^2)(\lambda_2^2 + p^2)} \{ (\lambda_1\lambda_2 - p^2) \sin pt + \\
 & + p(\lambda_1 + \lambda_2) \cos pt \}. \tag{2.5.37}
 \end{aligned}$$

Хорошо известно (да это и легко получить), что корни квадратного уравнения (2.5.9) обладают следующими свойствами:

$$\lambda_1\lambda_2 = k^2, \quad \lambda_1 + \lambda_2 = -2b, \tag{2.5.38}$$

кроме того, из того же уравнения следует

$$\lambda_1^2 = -2b\lambda_1 - k^2, \quad \lambda_2^2 = -2b\lambda_2 - k^2,$$

поэтому

$$\begin{aligned}
 (\lambda_1^2 + p^2)(\lambda_2^2 + p^2) &= (p^2 - k^2 - 2b\lambda_1)(p^2 - k^2 - 2b\lambda_2) = \\
 &= (p^2 - k^2)^2 - 2b(p^2 - k^2)(\lambda_1 + \lambda_2) + 4b^2\lambda_1\lambda_2 = (p^2 - k^2)^2 + 4b^2p^2, \tag{2.5.39}
 \end{aligned}$$

в результате чего частное решение приобретает вид

$$q_2 = \frac{h}{(p^2 - k^2)^2 + 4b^2p^2} \left[(k^2 - p^2) \sin pt - 2bp \cos pt \right]. \tag{2.5.40}$$

Таким образом, показано, что при учете сил сопротивления вынужденные колебания не затухают в отличие от свободных.

2.6 Амплитудно–частотная характеристика вынужденных колебаний при вязком сопротивлении

Ранее было показано, что вынужденные колебания при любом сопротивлении не затухают и имеют вид

$$q_2 = \frac{h}{(p^2 - k^2)^2 + 4b^2p^2} \left[(k^2 - p^2) \sin pt - 2bp \cos pt \right]. \tag{2.6.1}$$

Представим это выражение в виде, более удобном для физической интерпретации, для чего введем две новые величины

$$D \cos \varepsilon = k^2 - p^2, \quad (2.6.2)$$

$$D \sin \varepsilon = -2bp. \quad (2.6.3)$$

Тогда выражение в квадратной скобке в (2.6.1) можно будет записать так:

$$\begin{aligned} (k^2 - p^2) \sin pt - 2bp \cos pt &= D(\sin pt \cos \varepsilon + \cos pt \sin \varepsilon) = \\ &= D \sin(pt + \varepsilon), \end{aligned}$$

Следовательно, для q_2 будем иметь

$$q_2 = \frac{hD}{(p^2 - k^2) + 4b^2 p^2} \sin(pt + \varepsilon). \quad (2.6.4)$$

Множитель перед синусом в последнем выражении представляет собой амплитуду вынужденных колебаний. Из (2.6.2) и (2.6.3) следует, что

$$D = \sqrt{(k^2 - p^2)^2 + 4b^2 p^2},$$

поэтому окончательное выражение для амплитуды (обозначим ее буквой A) будет следующим:

$$A = \frac{h}{\sqrt{(k^2 - p^2)^2 + 4b^2 p^2}}. \quad (2.6.5)$$

Введем опять коэффициент динамичности

$$\gamma = \frac{Ac}{H} \quad (2.6.6)$$

как отношение амплитуды вынужденных колебаний к статическому отклонению от положения равновесия под действием постоянной силы H . Тогда γ примет вид

$$\gamma = \frac{hc}{\sqrt{(k^2 - p^2)^2 + 4b^2 p^2}} = \frac{Hc}{m\sqrt{(k^2 - p^2)^2 + 4b^2 p^2}} = \frac{k^2}{\sqrt{(k^2 - p^2)^2 + 4b^2 p^2}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{p^2}{k^2}\right)^2 + \frac{4b^2 p^2}{k^4}}}. \quad (2.6.7)$$

Для более компактной записи введем безразмерные величины

$$z = \frac{p}{k}, \quad \beta = \frac{b}{k}, \quad (2.6.8)$$

в результате чего коэффициент динамичности запишется в безразмерной форме

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{(1 - z^2)^2 + 4\beta^2 z^2}}. \quad (2.6.9)$$

Рассмотрим более подробно зависимость γ от z (т.е. от частоты возмущающей силы). Как видно из последнего равенства, $\gamma = 1$ при $z = 0$, а при $z \rightarrow \infty$ $\gamma \rightarrow 0$. Рассмотрим функцию от z , которая стоит под знаком радикала,

$$y = (1 - z^2)^2 + 4\beta^2 z^2, \quad (2.6.10)$$

и исследуем ее на наличие экстремума. Для этого вычислим производную от y по z и приравняем ее нулю:

$$y' = -4(1 - z^2)z + 8\beta^2 z = 4z(2\beta^2 - 1 + z^2) = 0. \quad (2.6.11)$$

Корнями этого уравнения являются

$$z_1 = 0, \quad z_2 = \sqrt{1 - 2\beta^2}. \quad (2.6.12)$$

При нахождении z_2 взят положительный знак перед радикалом, поскольку величина z положительна по определению. Для существования этого корня необходимо, чтобы β удовлетворяла условию $\beta < \frac{1}{\sqrt{2}}$: только в этом случае подкоренное выражение в (2.6.12) будет положительным. Если это не так, то такого корня не существует.

Вычислим теперь вторую производную от y :

$$y'' = 4(2\beta^2 - 1 + z^2) + 8z^2. \quad (2.6.13)$$

Для первого корня имеем

$$y''(z_1) = 4(2\beta^2 - 1) = \begin{cases} < 0, & \beta < \frac{1}{\sqrt{2}} \\ > 0, & \beta > \frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases}. \quad (2.6.14)$$

Первый случай соответствует максимуму y и, следовательно, минимуму γ , второй - минимуму y и максимуму γ . Если корень z_2 существует, то

$$y''(z_2) = 8(1 - 2\beta^2) > 0,$$

т.е. y при этом значении минимально и, следовательно, γ максимально. При этом

$$\gamma_{\max} = \frac{1}{2\beta\sqrt{1-\beta^2}}, \quad (2.6.15)$$

т.е. высота этого максимума становится тем больше, чем меньше β (чем меньше сопротивление), оставаясь конечной величиной. Между прочим, γ остается конечным и в случае резонанса, когда $z = 1$. Поведение коэффициента динамичности в зависимости от частоты возмущающей силы при различном сопротивлении представлены на рис. 23.

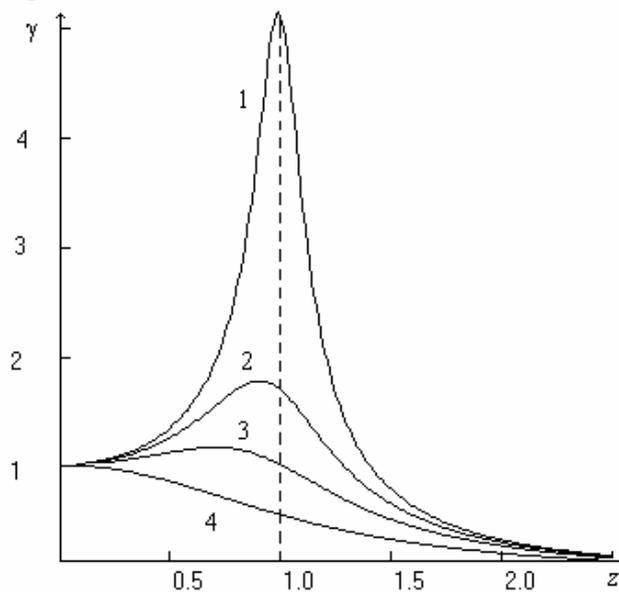


Рис. 23

Кривые 1 – 3 соответствуют условию существования корня z_2 ($\beta=0.1$; 0.3; 0.5 соответственно), при этом максимум тем выше, чем меньше коэффициент сопротивления, а кривая 4 – его отсутствию ($\beta=0.9$). Существенным является то,

что при больших сопротивлениях ($\beta > 1/\sqrt{2}$) и больших частотах ($z > 1$, или $p > k$) амплитуда вынужденных колебаний меньше статического смещения.

Тема 3. Лекция 4. Общие методы исследования нелинейных колебаний

Все реальные конструкции являются нелинейными, т.е. описываются нелинейными уравнениями, однако большая часть практических расчетов выполняется на основе линейной теории (в силу ее простоты). Как правило, такие расчеты приводят к удовлетворительным результатам, но многие явления не могут быть объяснены в рамках линейного приближения. К ним относятся, например, наличие нескольких устойчивых режимов вынужденных колебаний, реализация которых зависит от начальных условий, автоколебания и так далее. Это делает необходимым разработку методов расчета на основе нелинейной теории. Особенно необходимы такие методы при рассмотрении таких нелинейных систем, в которых нелинейность ни при каких условиях не является малой.

3.1 Свободные колебания (общее рассмотрение)

Рассмотрим простейшую систему с одной степенью свободы и будем считать, что на нее действуют только потенциальные силы, причем зависимость потенциальной энергии от обобщенной координаты отлична от квадратичной, из-за чего система и становится нелинейной. Воспользуемся тем обстоятельством, что при движении в потенциальных силовых полях полная механическая энергия сохраняется, т.е. является интегралом движения,

$$E = T + U = \frac{1}{2}m(x)\dot{x}^2 + U(x) = \text{const}. \quad (3.1.1)$$

Эта константа определяется, разумеется, начальными условиями. Обобщенную координату в дальнейшем будем обозначать буквой x . Разрешим равенство (3.1.1) относительно скорости

$$\frac{dx}{dt} = \pm \sqrt{\frac{2}{m(x)}[E - U(x)]}. \quad (3.1.2)$$

Это дифференциальное уравнение допускает разделение переменных, так что можно написать

$$t = \pm \int_{x_0}^x \frac{dy}{\sqrt{\frac{2}{m(y)}[E - U(y)]}}, \quad (3.1.3)$$

где x_0 – начальная координата. Знак перед интегралом выбирается положительным, если dy положительно, и отрицательным – в противоположном случае, поскольку время является величиной положительной.

Даже не вычисляя интеграл, можно сделать далеко идущие выводы.

Совершенно ясно, что движение системы возможно только в том случае, когда квадратная скобка под знаком радикала положительна (инерционный коэффициент, напомним, всегда положителен), поскольку все фигурирующие в механике величины являются действительными. Поэтому в случае потенциальной энергии, представленной на рис. 29, движение возможно только в области, определяемой значениями $x \geq x_1$, где $U < E$, т.е. движение ограничено слева, а вправо система может двигаться неограниченно. Точка x_1 , в которой $U = E$ и, как следует из (3.1.2), скорость равна нулю, называется точкой поворота.

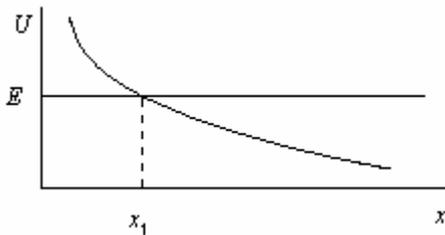


Рис. 29

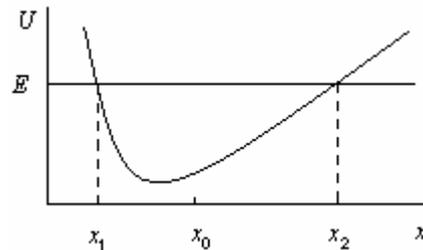


Рис. 30

В случае, представленном на рис. 30, потенциальная энергия имеет минимум и по тем же соображениям движение возможно только в области, включающей этот минимум, между двумя точками поворота $x_1 \leq x \leq x_2$, т.е. в ограниченной области. Такое движение является колебательным, периодическим и, следовательно, фазовые траектории, определяемые выражением (3.1.1), будут замкнутыми и симметричными относительно оси x в силу квадратичной зависимости кинетической энергии от скорости. При постоянном m они будут симметричными и относительно оси \dot{x} при четной потенциальной энергии.

Воспользовавшись выражением (3.1.3), можно вычислить период таких колебаний. Движение начинается из положения x_0 , для определенности будем считать, что начальная скорость направлена вправо, тогда система будет двигаться в направлении точки x_2 , в которой она должна остановиться. Приращение координаты при этом положительно, поэтому время, затраченное на перемещение из x_0 в x_2 , равно

$$t_{02} = \int_{x_0}^{x_2} \frac{dy}{\sqrt{\frac{2}{m}[E - U(y)]}}. \quad (3.1.4)$$

В точке x_2 система остановится и потом будет двигаться в обратном направлении (координата при этом уменьшается), пока не достигнет точки x_1 . На это уйдет время

$$t_{21} = - \int_{x_2}^{x_1} \frac{dy}{\sqrt{\frac{2}{m}[E - U(y)]}}. \quad (3.1.5)$$

В точке x_1 произойдет остановка, и система начнет движение в сторону возрастания координаты. Для достижения точки x_0 потребуется время

$$t_{10} = \int_{x_1}^{x_0} \frac{dy}{\sqrt{\frac{2}{m}[E - U(y)]}}. \quad (3.1.6)$$

Сумма этих времен и равна периоду колебаний

$$\Theta = t_{02} + t_{21} + t_{10} = \int_{x_0}^{x_2} \frac{dy}{\sqrt{\frac{2}{m}[E - U(y)]}} - \int_{x_2}^{x_1} \frac{dy}{\sqrt{\frac{2}{m}[E - U(y)]}} + \int_{x_1}^{x_0} \frac{dy}{\sqrt{\frac{2}{m}[E - U(y)]}}.$$

Первый и последний интегралы можно объединить в один с нижним пределом x_1 и верхним x_2 , таким же является средний интеграл, поэтому

$$\Theta = 2 \int_{x_1}^{x_2} \frac{dy}{\sqrt{\frac{2}{m}[E - U(y)]}}. \quad (3.1.7)$$

Понимая под амплитудой колебаний наибольшее отклонение от положения равновесия (от той точки, где потенциальная энергия имеет минимум; в ней всегда можно разместить начало координат) и считая для определенности таковым x_2 , приходим к выводу, что в случае нелинейных колебаний период зависит от их амплитуды, поскольку определенный интеграл является функцией своего верхнего предела. Это является специфической особенностью нелинейных колебаний. Напомним, что период свободных колебаний в линейном случае от амплитуды не зависит, определяясь только характеристиками системы (постоянными значениями инерционного и квазиупругого коэффициентов). Этот результат следует и из выражения (3.1.7) при постоянном m и квадратичной зависимости потенциальной энергии от координаты.

Итак, движение системы под действием нелинейной восстанавливающей силы является периодическим и, следовательно, закон такого движения может быть представлен в виде ряда Фурье

$$x = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega t + b_n \sin n\omega t),$$

где $\omega = 2\pi/\Theta$ – основная частота колебаний, зависящая, как показано выше, от амплитуды. Среди коэффициентов разложения Фурье особое место занимает a_0 , который характеризует смещение колебаний от положения статического равновесия. При постоянном m и четной потенциальной энергии он должен быть равным нулю.

Нахождение закона, связанное, в принципе, с вычислением интеграла в (3.1.3) и обращением полученного выражения (или определением коэффициентов Фурье), технически неосуществимо. Поэтому используются иные подходы, определяемые специфическими особенностями конкретной ситуации (например, наличием малого параметра) и связанные с построением приближенных решений. Рассмотрим сначала один из наиболее простых случаев.

Тема 4. Лекция 5. Системы с кусочно-линейной характеристикой (метод припасовывания)

Рассмотрим систему с зазором, представленную на рис.31. Здесь груз массы m расположен на гладкой горизонтальной поверхности и зажат между двумя одинаковыми пружинами жесткости c_1 .

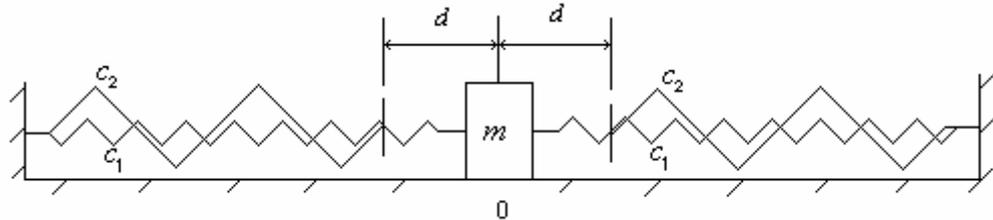


Рис. 31

Будем считать, что в среднем положении пружины жесткости c_1 не деформированы, а между грузом и концами одинаковых пружин жесткости c_2 имеются зазоры величиной d , т.е. система симметрична относительно средней точки 0. Если груз вывести из этого положения, равновесие нарушится и в системе возникнет колебательный процесс, характер которого будет существенно определяться величиной начального отклонения от равновесного положения. При нулевой начальной скорости и начальном смещении, меньшем величины зазора, будут иметь место обычные свободные колебания с амплитудой, меньшей d , однако при смещении, большем d , тоже возникнут колебания, но уже нелинейные, поскольку в них примет участие и пружина жесткости c_2 .

Выберем начало координат в положении равновесия и ось x направим вправо. Величину упругой силы будем, как обычно, определять с помощью закона Гука

$$F = c|l - l_0|, \quad (4.1.1)$$

где l_0 – естественная длина пружины, а l – ее длина в произвольном (деформированном) состоянии. Две пружины, между которыми все время зажат груз, можно заменить одной пружиной, жесткость которой равна сумме жесткостей этих двух пружин (параллельное соединение), в нашем случае эффективная жесткость равна $2c_1$. Для определенности будем считать, что груз смещен вправо. Из определения (4.1.1) и рис. 32 видно, что упругая сила, действующая на груз со стороны эффективной пружины в произвольном положении, определяемом координатой x , по величине равна

$$F_1 = 2c_1(l_{01} - l_1) = cx, \quad (4.1.2)$$

где $c = 2c_1$, и направлена к положению равновесия.

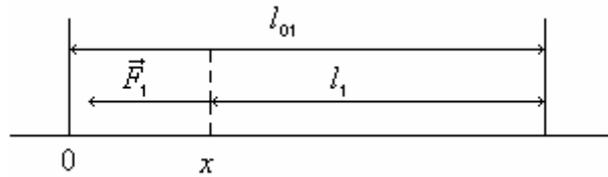


Рис. 32.

При отклонении груза от положения равновесия, большем величины зазора d , например, вправо, подключается правая пружина c_2 (рис. 33).

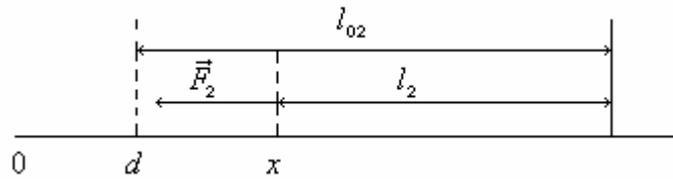


Рис. 33.

Действующая с ее стороны сила по величине равна

$$F_2 = c_2 |l_2 - l_{02}| = c_2 (l_{02} - l_2) = c_2 (x - d). \quad (4.1.3)$$

Таким образом, величина действующей на груз силы F равна

$$F = \begin{cases} x < d, & F = F_1 = cx, \\ x > d, & F = F_1 + F_2 = cx + c_2(x - d). \end{cases} \quad (4.1.4)$$

Графическая зависимость проекции силы на ось x от координаты, называемая характеристикой силы, представлена на рис. 34.

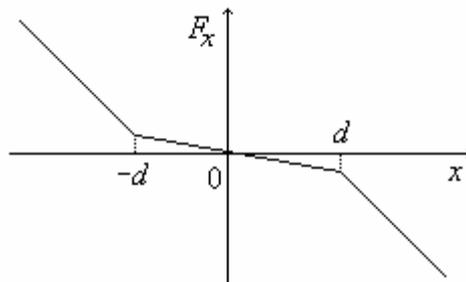


Рис. 34.

Она представляет собой совокупность трех прямых с разными углами наклона, из-за чего и носит название кусочно-линейной характеристики.

Рассмотрим случай, когда груз начинает движение из положения $x_0 = L > d$ без начальной скорости. Уравнение движения при этом будет иметь вид

$$m\ddot{x} = -cx - c_2(x - d),$$

или

$$m\ddot{x} + (c + c_2)x = c_2d. \quad (4.1.5)$$

Приведем его к стандартному виду, разделив все члены на m и введя обозначение,

$$k_2^2 = \frac{c + c_2}{m}. \quad (4.1.6)$$

Тогда

$$\ddot{x} + k_2^2x = \frac{c_2d}{m}. \quad (4.1.7)$$

Общее решение соответствующего однородного уравнения известно, а частное решение неоднородного будем искать в виде постоянной величины D , которая, как нетрудно видеть, равна

$$D = \frac{c_2d}{mk_2^2},$$

так что общее решение уравнения (4.1.7) получится следующим:

$$x = A \sin k_2t + B \cos k_2t + \frac{c_2d}{mk_2^2}. \quad (4.1.8)$$

Постоянные A и B определим по начальным условиям, но для этого нужно найти выражение для скорости, продифференцировав (4.1.8) по времени:

$$\dot{x} = k_2(A \cos k_2t - B \sin k_2t). \quad (4.1.9)$$

При $t = 0$ получим из (4.1.8) и (4.1.9)

$$L = B + \frac{c_2d}{mk_2^2},$$

$$0 = k_2A,$$

поэтому решение (4.1.8), удовлетворяющее начальным условиям, запишется так:

$$x = \left(L - \frac{c_2 d}{mk_2^2} \right) \cos k_2 t + \frac{c_2 d}{mk_2^2}. \quad (4.1.10)$$

Из рис. 13 и 14 видно, что под действием упругих сил груз будет двигаться влево (это видно и из (4.1.9) при $A=0$), так что в некоторый момент времени t_1 он окажется в точке d , где пружина с индексом 2 отсоединится от него, и далее груз будет двигаться под действием других сил, что должно описываться другим уравнением, а состояние в точке d должно рассматриваться для этого движения в качестве начальных условий. Значит,

$$d = \left(L - \frac{c_2 d}{mk_2^2} \right) \cos k_2 t_1 + \frac{c_2 d}{mk_2^2},$$

откуда получим

$$\cos k_2 t_1 = d \frac{1 - \frac{c_2}{mk_2^2}}{L - \frac{c_2 d}{mk_2^2}} = d \frac{mk_2^2 - c_2}{mk_2^2 L - c_2 d} = \frac{cd}{(c + c_2)L - c_2 d} \quad (4.1.11)$$

с учетом (4.1.6). Для нахождения t_1 нужно решить полученное тригонометрическое уравнение, выбрав только главную ветвь. Скорость v_1 в этот момент времени определим с помощью (4.1.9) при $A = 0$:

$$\begin{aligned} v_1 &= -k_2 \left(L - \frac{c_2 d}{mk_2^2} \right) \sin k_2 t_1 = -k_2 \left(L - \frac{c_2 d}{mk_2^2} \right) \sqrt{1 - \cos^2 k_2 t_1} = \\ &= -k_2 \left(L - \frac{c_2 d}{mk_2^2} \right) \sqrt{1 - \left(\frac{cd}{(c + c_2)L - c_2 d} \right)^2}. \end{aligned} \quad (4.1.12)$$

На участке $-d \leq x \leq d$ груз, как уже отмечалось, движется только под действием силы \vec{F}_1 (см. (4.1.4)), поэтому уравнение движения имеет вид

$$m\ddot{x} = -cx,$$

или

$$\ddot{x} + k_1^2 x = 0, \quad (4.1.13)$$

где

$$k_1^2 = \frac{c}{m}. \quad (4.1.14)$$

Решение уравнения (4.1.13) запишем в виде

$$x = A_1 \sin k_1 t + B_1 \cos k_1 t, \quad (4.1.15)$$

тогда для скорости будем иметь выражение

$$\dot{x} = k_1 (A_1 \cos k_1 t - B_1 \sin k_1 t), \quad (4.1.16)$$

а постоянные интегрирования A_1 и B_1 определим по начальным условиям

$x_0 = d$, $\dot{x}_0 = v_1$ при $t = 0$, т.е. $B_1 = d$, $A_1 = \frac{v_1}{k_1}$, в результате чего закон движения

примет вид

$$x = \frac{v_1}{k_1} \sin k_1 t + d \cos k_1 t. \quad (4.1.17)$$

В момент времени t_2 груз достигнет положения равновесия:

$$0 = \frac{v_1}{k_1} \sin k_1 t_2 + d \cos k_1 t_2.$$

Отсюда следует, что данный промежуток времени тоже определяется тригонометрическим уравнением

$$\operatorname{tg} k_1 t_2 = -\frac{v_1}{k_1 d}. \quad (4.1.18)$$

Время, затраченное на переход из крайнего правого положения в начало координат, составляет четверть периода колебаний, поэтому период равен

$$\Theta = 4(t_1 + t_2) = \frac{4}{k_2} \arccos \frac{cd}{(c + c_2)L - c_2 d} + \frac{4}{k_1} \operatorname{arctg} \left(-\frac{k_1 d}{v_1} \right). \quad (4.1.19)$$

Это и есть искомая зависимость периода от амплитуды колебаний, в качестве которой в данном случае выступает начальное отклонение груза от положения равновесия L . Качественное представление о виде этой зависимости можно получить, рассмотрев некоторые предельные случаи. Например, при $L \rightarrow d$

$$\frac{cd}{(c + c_2)L - c_2d} \rightarrow 1$$

и, следовательно,

$$\arccos \frac{cd}{(c + c_2)L - c_2d} \rightarrow 0.$$

При этом, как видно из (4.1.12), $v_1 \rightarrow -0$, поэтому $-\frac{k_1d}{v_1} \rightarrow +\infty$,

$\operatorname{arctg} \left(-\frac{k_1d}{v_1} \right) \rightarrow \frac{\pi}{2}$ и $\Theta \rightarrow \frac{2\pi}{k_1}$. С другой стороны, при $L \rightarrow \infty$

$$\frac{cd}{(c + c_2)L - c_2d} \rightarrow 0,$$

$$\arccos \frac{cd}{(c + c_2)L - c_2d} \rightarrow \arccos 0 = \frac{\pi}{2},$$

$v_1 \rightarrow -k_2L$, $-\frac{k_1d}{v_1} \rightarrow \frac{k_1d}{k_2L} \rightarrow 0$, $\operatorname{arctg} \left(-\frac{k_1d}{v_1} \right) \rightarrow 0$ и $\Theta \rightarrow \frac{2\pi}{k_2}$.

Таким образом, частота колебаний $k = \frac{2\pi}{\Theta}$ меняется от k_1 до k_2 с изменением амплитуды от d до бесконечности (конечно, эту бесконечность надо понимать условно, как величину, значительно большую, чем d). График этой зависимости (так называемая скелетная кривая) представлен на рис. 35.

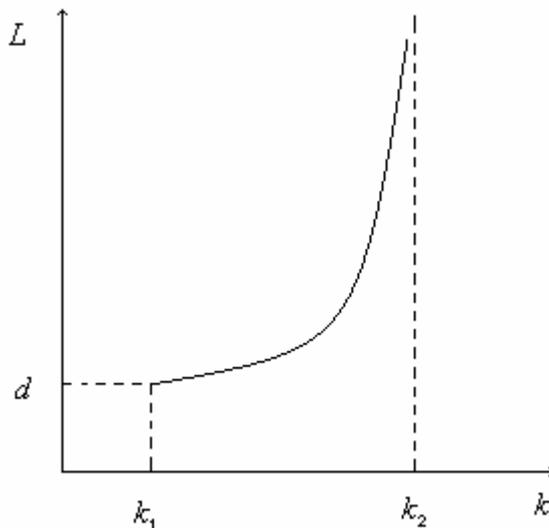


Рис. 35.

Метод, который использовался при решении этой задачи, состоял в том, что на каждом участке движения точно решалось соответствующее линейное дифференциальное уравнение, причем постоянные интегрирования на следующем участке определялись из условий непрерывности изменения координаты и скорости. Такой подход и называется методом припасовывания.

Тема 5. Лекция 6. Колебания в системах, близких к линейным. Начальные понятия о теории возмущений

Близкими к линейным будем называть такие системы, для которых соответствующие дифференциальные уравнения хотя и являются нелинейными, но содержат некоторый параметр, при нулевом значении которого уравнения вырождаются в линейные. При этом предполагается, что этот параметр сам по себе является малым.

Тогда можно построить решение нелинейного уравнения в виде ряда по степеням этого малого параметра. Такой способ нахождения решения носит название теории возмущений. В качестве примера ее реализации рассмотрим конкретное уравнение с кубической нелинейностью

$$m\ddot{x} = -cx - \alpha x^3, \quad (5.1.1)$$

которое можно интерпретировать как уравнение свободных колебаний груза массы m под действием восстанавливающей силы с нелинейной характеристикой $F = -cx - \alpha x^3$. Будем считать, что параметр α является малым, т.е. величина $\alpha x^3 \ll cx$. Это неравенство следует понимать в том смысле, что понятие “намного меньше” условно означает, что одна величина, по крайней мере, в десять раз меньше другой, т.е. меньше ее на порядок. Введем обозначения

$$k^2 = \frac{c}{m}, \quad \varepsilon = \frac{\alpha}{m}, \quad (5.1.2)$$

тогда уравнение (5.1.1) можно записать в виде

$$\ddot{x} + k^2 x = -\varepsilon x^3, \quad (5.1.3)$$

с формальной точки зрения считая величину малой. Решение этого уравнения будем искать в виде разложения по степеням малого параметра ε :

$$x = x_0 + \varepsilon x_1 + \varepsilon^2 x_2 + \dots \quad (5.1.4)$$

Далее, подставим (5.1.4) в (5.1.3)

$$\ddot{x}_0 + \varepsilon \ddot{x}_1 + \varepsilon^2 \ddot{x}_2 + \dots + k^2 (x_0 + \varepsilon x_1 + \varepsilon^2 x_2 + \dots) = -\varepsilon (x_0 + \varepsilon x_1 + \varepsilon^2 x_2 + \dots)^3$$

и приравняем в обеих частях члены при одинаковых степенях ε , в результате чего получим систему уравнений

$$\ddot{x}_0 + k^2 x_0 = 0, \quad (5.1.5)$$

$$\ddot{x}_1 + k^2 x_1 = -x_0^3, \quad (5.1.6)$$

$$\ddot{x}_2 + k^2 x_2 = -3x_0^2 x_1 \quad (5.1.7)$$

и так далее. Видно, что левые части этих уравнений одинаковы по форме и линейны, а правые являются известными функциям, определяемыми решениями уравнений на предыдущем уровне по малому параметру, т.е. алгоритм нахождения решения совершенно прозрачен и, на первый взгляд, не должен быть сопряжен с какими-либо проблемами, поскольку в нулевом приближении уравнение (5.1.5) описывает свободные колебания. В данном случае это удобно представить в виде

$$x_0 = A \sin(kt + \delta). \quad (5.1.8)$$

Тогда

$$\ddot{x}_1 + k^2 x_1 = -A^3 \sin^3(kt + \delta), \quad (5.1.9)$$

т.е. это уравнение описывает вынужденные колебания под действием периодической силы, частота которой совпадает с собственной частотой системы. Общее решение соответствующего однородного уравнения имеет вид (5.1.8), а частное решение, обозначим его \tilde{x} , нужно вычислять по ранее полученной формуле

$$\tilde{x} = -\frac{A^3}{mk} \int_0^t \sin^3(k\tau + \delta) \sin k(t - \tau) d\tau. \quad (5.1.10)$$

Для вычисления интеграла преобразуем подынтегральную функцию, записав сначала (для сокращения записи обозначим $\alpha = k\tau + \delta$, $\beta = k(t - \tau)$)

$$\begin{aligned} \sin^3 \alpha &= \sin \alpha \sin^2 \alpha = \frac{1}{2} \sin \alpha (1 - \cos 2\alpha) = \\ &= \frac{1}{2} \sin \alpha - \frac{1}{2} \sin \alpha \cos 2\alpha = \frac{1}{2} \sin \alpha - \frac{1}{4} (\sin 3\alpha - \sin \alpha) = \\ &= \frac{3}{4} \sin \alpha - \frac{1}{4} \sin 3\alpha, \end{aligned} \quad (5.1.11)$$

и далее,

$$\sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{2} [\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)] =$$

$$= \frac{1}{2} [\cos(2k\tau - kt + \delta) - \cos(kt + \delta)], \quad (5.1.12)$$

$$\begin{aligned} \sin 3\alpha \sin \beta &= \frac{1}{2} [\cos(3\alpha - \beta) - \cos(3\alpha + \beta)] = \\ &= \frac{1}{2} [\cos(4k\tau - kt + 3\delta) - \cos(2k\tau + kt + 3\delta)]. \end{aligned} \quad (5.1.13)$$

Тогда

$$\begin{aligned} \sin^3(k\tau + \delta) \sin k(t - \tau) &= \frac{3}{8} [\cos(2k\tau - kt + \delta) - \cos(kt + \delta)] - \\ &- \frac{1}{8} [\cos(4k\tau - kt + 3\delta) - \cos(2k\tau + kt + 3\delta)] \end{aligned}$$

и, следовательно,

$$\begin{aligned} \int_0^t \sin^3(k\tau + \delta) \sin k(t - \tau) d\tau &= \frac{3}{16k} [\sin(kt + \delta) + \sin(kt - \delta)] - \\ &- \frac{3}{8} t \cos(kt + \delta) - \frac{1}{32k} [\sin(2kt + 3\delta) + \sin(kt - 3\delta)] + \\ &+ \frac{1}{16k} [\sin 3(kt + \delta) - \sin(kt + 3\delta)]. \end{aligned} \quad (5.1.14)$$

Из этого выражения видно, что частное решение неоднородного уравнения уже в первом приближении содержит секулярный член $\sim t \cos(kt + \delta)$, который приводит к тому, что с течением времени отклонение от положения равновесия будет неограниченно возрастать.

Таким образом, изложенный способ получения решения нелинейного уравнения пригоден только для малых временных интервалов, для произвольно больших интервалов следует действовать иначе.

Тема 6. Лекция 7. Колебания в системах, близких к линейным. Метод Боголюбова–Митропольского

Рассмотрим общий случай нелинейного уравнения, описывающего колебательный процесс и имеющего вид

$$\ddot{x} + k^2 x = \varepsilon f(x, \dot{x}), \quad (6.1.1)$$

где ε – малый положительный параметр.

При отсутствии возмущения, т.е. при $\varepsilon = 0$, из (6.1.1) получается уравнение для свободных колебаний, решение которого имеет вид

$$x = a \cos(kt + \delta), \quad (6.1.2)$$

где амплитуда a постоянна, а фаза $\psi = kt + \delta$ равномерно возрастает, что можно записать так:

$$\frac{da}{dt} = 0, \quad \frac{d\psi}{dt} = k. \quad (6.1.3)$$

Наличие нелинейного возмущения ($\varepsilon \neq 0$) приводит, как было показано ранее, к зависимости частоты от амплитуды и может вызвать систематическое увеличение или уменьшение самой амплитуды. Эти эффекты должны исчезать при выключении нелинейного возмущения, т.е. в пределе $\varepsilon \rightarrow 0$. Поэтому решение уравнения (6.1.1) можно искать в виде

$$x = a \cos \psi + \varepsilon u_1(a, \psi) + \varepsilon^2 u_2(a, \psi) + \dots, \quad (6.1.4)$$

в котором u_1, u_2, \dots являются периодическими функциями ψ с периодом 2π , а величины a и ψ определяются уравнениями

$$\frac{da}{dt} = \varepsilon A_1(a) + \varepsilon^2 A_2(a) + \dots, \quad (6.1.5)$$

$$\frac{d\psi}{dt} = k + \varepsilon B_1(a) + \varepsilon^2 B_2(a) + \dots. \quad (6.1.6)$$

Определению подлежат величины a , ψ , A_n , B_n , для чего необходимо вычислить соответствующие производные, подставить их в уравнение (6.1.1) и приравнять в левой и правой частях полученного соотношения члены при одинаковых степенях ε (как и при использовании теории возмущений).

Рассмотрим простейший случай получения решения в первом приближении, т.е. положим (индексы в дальнейшем опускаем)

$$x = a \cos \psi + \varepsilon u(a, \psi), \quad (6.1.7)$$

$$\frac{da}{dt} = \varepsilon A(a), \quad (6.1.8)$$

$$\frac{d\psi}{dt} = k + \varepsilon B(a). \quad (6.1.9)$$

Продифференцируем по времени выражение (6.1.7):

$$\dot{x} = \dot{a} \cos \psi - a \dot{\psi} \sin \psi + \varepsilon \left(\frac{\partial u}{\partial a} \dot{a} + \frac{\partial u}{\partial \psi} \dot{\psi} \right), \quad (6.1.10)$$

$$\begin{aligned} \ddot{x} = & \ddot{a} \cos \psi - 2\dot{a}\dot{\psi} \sin \psi - a\ddot{\psi} \sin \psi - a\dot{\psi}^2 \cos \psi + \\ & + \varepsilon \left(\frac{\partial^2 u}{\partial a^2} \dot{a}^2 + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial a \partial \psi} \dot{a}\dot{\psi} + \frac{\partial^2 u}{\partial \psi^2} \dot{\psi}^2 + \frac{\partial u}{\partial a} \ddot{a} + \frac{\partial u}{\partial \psi} \ddot{\psi} \right). \end{aligned} \quad (6.1.11)$$

Из (6.1.8) и (6.1.9), далее, следует

$$\ddot{a} = \varepsilon \frac{\partial A}{\partial a} \dot{a} = \varepsilon^2 \frac{\partial A}{\partial a} A, \quad (6.1.12)$$

$$\ddot{\psi} = \varepsilon \frac{\partial B}{\partial a} \dot{a} = \varepsilon^2 \frac{\partial B}{\partial a} A, \quad (6.1.13)$$

т.е. вторые производные по времени от амплитуды и фазы пропорциональны квадрату малого параметра, поэтому в первом по ε приближении этими величинами можно пренебречь. По этой же причине

$$\dot{a}^2 \approx 0, \quad (6.1.14)$$

$$\dot{a}\dot{\psi} = \varepsilon A(k + \varepsilon B) \approx \varepsilon A k, \quad (6.1.15)$$

$$\dot{\psi}^2 = (k + \varepsilon B)^2 \approx k^2 + 2\varepsilon k B. \quad (6.1.16)$$

Подставив (6.1.10) и (3.411) в уравнение

$$\ddot{x} + k^2 x = \varepsilon f(x, \dot{x}), \quad (6.1.17)$$

с учетом (6.1.12)-(6.1.16) получим

$$-2\varepsilon k A \sin \psi - a(k^2 + 2\varepsilon k B) \cos \psi + \varepsilon k^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \psi^2} + k^2 (a \cos \psi + \varepsilon u) = \varepsilon f(x, \dot{x}). \quad (6.1.18)$$

Видно, что члены при нулевой степени ε взаимно уничтожаются, а приравнивание членов при первой степени дает

$$k^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial \psi^2} + u \right) - 2kA \sin \psi - 2kaB \cos \psi = f_0(a, \psi), \quad (6.1.19)$$

где обозначено

$$f_0(a, \psi) = f(x, \dot{x})|_{\varepsilon=0} = f(a \cos \psi, -ak \sin \psi). \quad (6.1.20)$$

Таким образом, функция u удовлетворяет уравнению

$$k^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial \psi^2} + u \right) = 2kA \sin \psi + 2kaB \cos \psi + f_0(a, \psi). \quad (6.1.21)$$

Из (6.1.20) видно, что f_0 является периодической функцией переменной ψ с периодом 2π , поэтому ее можно разложить в ряд Фурье

$$f_0(a, \psi) = g_0(a) + \sum_{n=1}^{\infty} [g_n(a) \cos n\psi + h_n(a) \sin n\psi], \quad (6.1.22)$$

где коэффициенты разложения определяются по формулам

$$g_0(a) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f_0(a, \psi) d\psi, \quad (6.1.23)$$

$$\left. \begin{aligned} g_n(a) &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f_0(a, \psi) \cos n\psi, \\ h_n(a) &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f_0(a, \psi) \sin n\psi \end{aligned} \right\} n = 1, 2, 3, \dots \quad (6.1.24)$$

и считаются известными.

Как следует из уравнения (6.1.21), u является периодической функцией той же переменной, следовательно, и ее можно разложить в ряд Фурье

$$u(a, \psi) = v_0(a) + \sum_{n=1}^{\infty} [v_n(a) \cos n\psi + w_n(a) \sin n\psi] \quad (6.1.25)$$

и свести, таким образом, решение дифференциального уравнения к системе алгебраических уравнений для величин v и w . Для этого подставим разложение

(6.1.25) в уравнение (6.1.21), вычислив предварительно соответствующие производные:

$$\frac{\partial u}{\partial \psi} = \sum_n n[-v_n \sin n\psi + w_n \cos n\psi], \quad (6.1.26)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \psi^2} = -\sum_n n^2[v_n \cos n\psi + w_n \sin n\psi]. \quad (6.1.27)$$

Подставив теперь (6.1.22), (6.1.25) и (6.1.27) в (6.1.21), будем иметь

$$\begin{aligned} & k^2 \left[-\sum_n n^2 (v_n \cos n\psi + w_n \sin n\psi) + v_0 + \sum_n (v_n \cos n\psi + w_n \sin n\psi) \right] = \\ & = 2kA \sin \psi + 2kaB \cos \psi + g_0 + \sum_n (g_n \cos n\psi + h_n \sin n\psi). \end{aligned}$$

Выражение в квадратных скобках можно записать в более компактной форме

$$\begin{aligned} & k^2 \left[v_0 - \sum_n (n^2 - 1)(v_n \cos n\psi + w_n \sin n\psi) \right] = \\ & = 2kA \sin \psi + 2kaB \cos \psi + g_0 + \sum_n (g_n \cos n\psi + h_n \sin n\psi). \end{aligned} \quad (6.1.28)$$

Приравнявая теперь в этом выражении коэффициенты при одинаковых гармониках, получим

$$k^2 v_0 = g_0, \quad (6.1.29)$$

$$0 = 2kA + h_1, \quad (6.1.30)$$

$$0 = 2kaB + g_1, \quad (6.1.31)$$

$$\left. \begin{aligned} -k^2(n^2 - 1)v_n &= g_n, \\ -k^2(n^2 - 1)w_n &= h_n \end{aligned} \right\} \quad (n \geq 2), \quad (6.1.32)$$

откуда следует

$$v_0 = \frac{g_0}{k^2}, \quad (6.1.33)$$

$$A = -\frac{h_1}{2k}, \quad (6.1.34)$$

$$B = -\frac{g_1}{2ka}, \quad (6.1.35)$$

$$\left. \begin{aligned} v_n &= -\frac{g_n}{k^2(n^2-1)}, \\ w_n &= -\frac{h_n}{k^2(n^2-1)} \end{aligned} \right\} (n \geq 2). \quad (6.1.36)$$

Таким образом, найдены выражения для A , B и всех коэффициентов разложения функции u , кроме первых двух v_1 и w_1 , поэтому необходимо наложить дополнительные условия, состоящие в том, что $v_1 = 0$ и $w_1 = 0$. Аналогичным образом можно построить решения и в следующих приближениях.

В качестве первого приложения применим развитую теорию к рассматривавшейся ранее системе с кубической нелинейностью

$$F(x) = cx + \alpha x^3. \quad (6.1.37)$$

При положительном значении α характеристика называется жесткой, а при отрицательном – мягкой. Будем считать нелинейность малой, т.е. коэффициент α является малым. Уравнение движения в этом случае имеет вид

$$m\ddot{x} = -cx - \alpha x^3.$$

Запишем его в ином виде, перенеся линейный член в левую часть, разделив затем все слагаемые на m и введя стандартное обозначение $k^2 = c/m$:

$$\ddot{x} + k^2 x = -\frac{\alpha}{m} x^3. \quad (6.1.38)$$

Сравнение этого уравнения с (6.1.17) показывает, что $\varepsilon f = -\frac{\alpha}{m} x^3$, т.е.

$\varepsilon = \frac{\alpha}{m}$, а $f = -x^3$. Тогда

$$f_0(x) = f(a \cos \psi + \varepsilon u + \dots) \Big|_{\varepsilon=0} = f(a \cos \psi) = -a^3 \cos^3 \psi. \quad (6.1.39)$$

Коэффициенты Фурье – разложения этой функции, конечно, можно было бы найти по формулам (6.1.23), (6.1.24), но гораздо проще получить их непосредственно, представив куб косинуса в виде комбинации тригонометрических функций в первой степени, т.е.

$$\begin{aligned}\cos^3 \psi &= \cos \psi \cos^2 \psi = \frac{1}{2} \cos \psi (1 + \cos 2\psi) = \frac{1}{2} \cos \psi + \frac{1}{2} \cos \psi \cos 2\psi = \\ &= \frac{1}{2} \cos \psi + \frac{1}{4} (\cos \psi + \cos 3\psi) = \frac{3}{4} \cos \psi + \frac{1}{4} \cos 3\psi,\end{aligned}$$

тогда

$$f_0 = -a^3 \cos^3 \psi = -\frac{3a^3}{4} \cos \psi - \frac{a^3}{4} \cos 3\psi. \quad (6.1.40)$$

Это и есть разложение Фурье данной функции, которое вырождается в многочлен, содержащий только две гармоники. Сравнение этого выражения с (6.1.22) показывает, что

$$g_0 = 0, \quad g_1 = -\frac{3a^3}{4}, \quad g_3 = -\frac{a^3}{4}, \quad (6.1.41)$$

а все остальные коэффициенты g и h равны нулю. Поэтому коэффициенты разложения искомой функции u , определяемые формулами (6.1.33), (6.1.36), равны

$$v_0 = \frac{g_0}{k^2} = 0, \quad v_3 = -\frac{g_3}{8k^2} = \frac{a^3}{32k^2}, \quad (6.1.42)$$

все остальные коэффициенты v и w равны нулю. Из (6.1.34), (6.1.35) следует, что

$$A = -\frac{h_1}{2k} = 0, \quad B = -\frac{g_1}{2ak} = \frac{3a^3}{8ak} = \frac{3a^2}{8k}. \quad (6.1.43)$$

Поэтому

$$\frac{da}{dt} = \varepsilon A = 0, \quad (6.1.44)$$

$$\frac{d\psi}{dt} = k + \varepsilon B = k + \frac{3a^2\varepsilon}{8k}. \quad (6.1.45)$$

Из (6.1.44) следует, что амплитуда $a = \text{const}$, а из (6.1.45) тогда вытекает

$$\psi = \left(k + \frac{3a^2\varepsilon}{8k} \right) t + C, \quad (6.1.46)$$

и с учетом (6.1.42) закон движения теперь можно записать в виде

$$x = a \cos \psi + \varepsilon u = a \cos \psi + \frac{\varepsilon a^3}{32k^2} \cos 3\psi, \quad (6.1.47)$$

т.е. решение нелинейной задачи (6.1.38) в первом приближении по малому параметру представляет собой суперпозицию двух колебаний с частотами

$$\Omega = k + \frac{3a^2\varepsilon}{8k}, \quad \Omega_1 = 3\Omega \quad (6.1.48)$$

и постоянными амплитудами; никаких секулярных членов нет. Частота, однако, зависит от амплитуды a . Разрешим первое из равенств (6.1.48) относительно a :

$$\Omega = k \left(1 + \frac{3\varepsilon a^2}{8k^2} \right) = k(1 + \beta a^2),$$

$$a = \sqrt{\frac{1}{\beta} \left(\frac{\Omega}{k} - 1 \right)}. \quad (6.1.49)$$

Поскольку подкоренное выражение должно быть положительным, то оно остается в том же виде при положительном β (т.е. при $\alpha > 0$) и при $\Omega \geq k$ и принимает вид

$$a = \sqrt{\frac{1}{|\beta|} \left(1 - \frac{\Omega}{k} \right)} \quad (6.1.50)$$

в противоположном случае, т.е. при $\beta < 0$ и $\Omega < k$. Графически эта зависимость представлена на рис. 36.

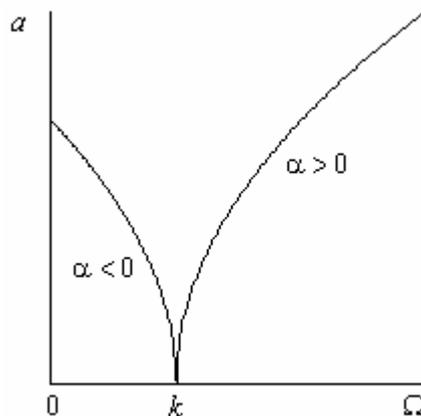


Рис. 36.

6.2 Вынужденные колебания в нелинейных системах. (непериодическое внешнее возмущение). Автоколебания

Рассмотренные ранее случаи колебательных систем свидетельствуют о том, что диссипативные силы (силы сопротивления), всегда в той или иной мере воздействующие на систему, приводят к затуханию колебаний с течением времени. Незатухающие колебания могут существовать лишь тогда, когда в системе имеется некоторый источник энергии, который может компенсировать рассеяние энергии, возникающее при наличии диссипативных сил. Таким источником может являться периодическая сила, действующая на колебательную систему: рассмотренные ранее вынужденные колебания не затухают при каком угодно сопротивлении.

Однако источник энергии сам по себе может и не иметь никакой определенной периодичности, но его воздействие на колебательную систему играет роль как бы отрицательного трения, которое компенсирует обычное положительное трение, вносимое диссипативными силами.

Колебания такого типа, существенно отличающиеся от случая периодического возмущения, называются автоколебаниями.

В автоколебательных системах при определенных условиях положение равновесия теряет устойчивость и возникает движение, переводящее систему в режим стационарного периодического колебания (т.е. колебания, для которого на соответствующих временных интервалах амплитуда и фаза являются постоянными).

Для осуществления такого режима необходимо, чтобы система включала в себя три составные части:

- 1) колебательную часть,
- 2) некоторый источник энергии, управляемый колебательной системой,
- 3) некоторый ограничитель, переводящий нарастающие колебания в стационарные.

Первые две части могут быть линейными, ограничитель же колебаний всегда является нелинейным и поэтому любая автоколебательная система описывается нелинейным дифференциальным уравнением.

Рассмотрим количественную сторону этого явления на простейшем примере фрикционных автоколебаний. Пусть тело массы m находится на движущейся с постоянной скоростью v ленте транспортера и удерживается пружиной жесткости c , как показано на рис. 38. Известно, что для определенных значений v тело будет совершать колебательное движение. Это является следствием того, что сила сухого трения (обозначим ее буквой F) между телом и лентой – не постоянная величина, она изменяется в зависимости от скорости u скольжения тела (относительной скорости) относительно ленты:

$$F = F(u) = F(v - \dot{x}), \quad (6.2.1)$$

где \dot{x} – абсолютная скорость груза.

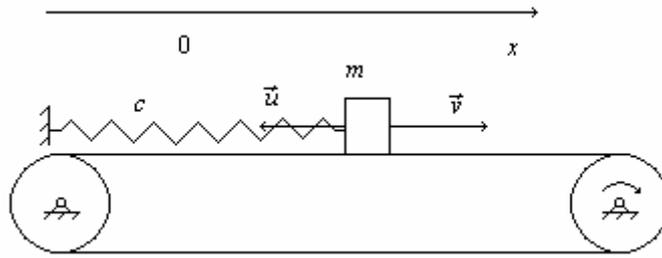


Рис. 38

Пока тело находится в покое относительно ленты ($u=0$), сила трения возрастает, оставаясь равной упругой силе пружины (рис.). Когда эта сила достигает критического значения F_0 , начинается движение тела относительно ленты, причем сила трения сначала будет уменьшаться с ростом u , а затем начнет увеличиваться (конкретный вид характеристики неизвестен, но качественно рис. 39 его отражает).

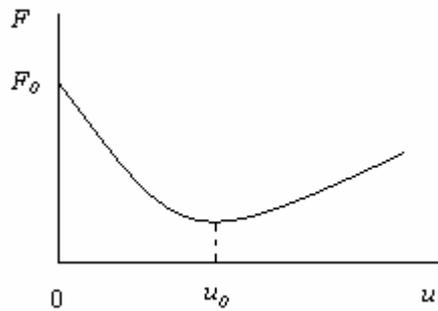


Рис. 39

Поместив начало оси x в положение, в котором пружина не деформирована, можно записать уравнение движения тела в виде

$$m\ddot{x} + cx = F(v - \dot{x}). \quad (6.2.2)$$

Груз будет находиться в равновесии ($\dot{x} = 0$, $\ddot{x} = 0$), если он получит статическое смещение

$$cx_{cm} = F(v). \quad (6.2.3)$$

Допустим, что груз сместился от этого положения на малую величину ξ , так что $x = x_{cm} + \xi$. При этом $\dot{x} = \dot{\xi}$, $\ddot{x} = \ddot{\xi}$. Разложим силу трения по малой величине $\dot{\xi}$, сохранив только первые два члена разложения,

$$F(u) = F(v - \dot{\xi}) \approx F(v) - F'(v)\dot{\xi}, \quad (6.2.4)$$

тогда

$$m\ddot{\xi} + c(x_{cm} + \xi) = F(v) - F'(v)\dot{\xi}, \quad (6.2.5)$$

или при учете (3)

$$m\ddot{\xi} + F'(v)\dot{\xi} + c\xi = 0. \quad (6.2.6)$$

Если $F' > 0$, то решение последнего уравнения затухает, и положение статического равновесия является устойчивым по отношению к малым возмущениям, в противном случае ξ экспоненциально растет с течением времени, и положение равновесия неустойчиво. Как видно из характеристики силы трения на рис. 39, положение равновесия устойчиво при движении ленты со скоростью $v > u_0$ и неустойчиво, если $v < u_0$.

Теперь построим количественное описание этого процесса. Имея в виду приведенные выше соображения, разложим силу трения по скорости до величин третьего порядка

$$F(v - \dot{x}) \approx b_0 + b_1\dot{x} + b_2\dot{x}^2 + b_3\dot{x}^3, \quad (6.2.7)$$

где

$$b_0 = F(v), \quad (6.2.8)$$

а

$$b_k = (-1)^k \left. \frac{dF}{du} \right|_{\dot{x}=0} \quad (k = 1, 2, 3). \quad (6.2.9)$$

Тогда уравнение движения (6.2.2) примет вид

$$m\ddot{x} + cx = b_0 + b_1\dot{x} + b_2\dot{x}^2 + b_3\dot{x}^3. \quad (6.2.10)$$

Введя новую переменную $y = x - x_{cm}$, с учетом (6.2.3) и (6.2.8) последнее уравнение можно переписать так:

$$m\ddot{y} + cy = b_1\dot{y} + b_2\dot{y}^2 + b_3\dot{y}^3 = b_1 \left(\dot{y} + \frac{b_2}{b_1}\dot{y}^2 + \frac{b_3}{b_1}\dot{y}^3 \right). \quad (6.2.11)$$

Теперь поделим все слагаемые на m , введем для краткости обозначения

$$k^2 = \frac{c}{m}, \quad \alpha = \frac{b_2}{b_1}, \quad \beta = \frac{b_3}{b_1}, \quad \varepsilon = \frac{b_1}{m} \quad (6.2.12)$$

и приведем, наконец, уравнение к виду

$$\ddot{y} + k^2 y = \varepsilon(\dot{y} + \alpha\dot{y}^2 + \beta\dot{y}^3). \quad (6.2.13)$$

Считая ε малой величиной и воспользовавшись полученными ранее результатами, запишем решение уравнения (6.2.13) с точностью до величин первого порядка по ε :

$$y = a \cos \psi + \varepsilon u(a, \psi), \quad (6.2.14)$$

$$\dot{a} = \varepsilon A(a), \quad (6.2.15)$$

$$\dot{\psi} = k + \varepsilon B(a), \quad (6.2.16)$$

$$v_0 = \frac{g_0}{k^2}, \quad v_1 = w_1 = 0, \quad (6.2.17)$$

$$\left. \begin{aligned} v_n &= -\frac{g_n}{(n^2 - 1)k^2}, \\ w_n &= -\frac{h_n}{(n^2 - 1)k^2} \end{aligned} \right\} (n \geq 2), \quad (6.2.18)$$

$$A = -\frac{h_1}{2k}, \quad B = -\frac{g_1}{2ak}. \quad (6.2.19)$$

Здесь, напомним, v и w – коэффициенты разложения в ряд Фурье функции u , а g и h – соответствующие коэффициенты разложения правой части уравнения f_0 при нулевом значении ε , которая в данном случае имеет вид

$$f_0(a, \psi) = \dot{y} + \alpha\dot{y}^2 + \beta\dot{y}^3 \Big|_{\varepsilon=0}. \quad (6.2.20)$$

Поскольку $\dot{y} \Big|_{\varepsilon=0} = -ak \sin \psi$, то

$$f_0 = -ak \sin \psi + \alpha(ak)^2 \sin^2 \psi - \beta(ak)^3 \sin^3 \psi. \quad (6.2.21)$$

Воспользовавшись известными тождествами

$$\sin^2 \psi = \frac{1}{2}(1 - \cos 2\psi),$$

$$\sin^3 \psi = \frac{3}{4} \sin \psi - \frac{1}{4} \sin 3\psi,$$

выражение (6.2.21) можно переписать иначе

$$\begin{aligned}
f_0 &= -ak \sin \psi + \frac{\alpha(ak)^2}{2}(1 - \cos 2\psi) - \frac{\beta(ak)^3}{4}(3 \sin \psi - \sin 3\psi) = \\
&= \frac{\alpha(ak)^2}{2} - \frac{\alpha(ak)^2}{2} \cos 2\psi - ak \left(1 + \frac{3}{4} \beta(ak)^2\right) \sin \psi + \frac{\beta(ak)^3}{4} \sin 3\psi. \quad (6.2.22)
\end{aligned}$$

Отсюда следует, что

$$g_0 = \frac{\alpha(ak)^2}{2}, \quad g_1 = 0, \quad g_2 = -\frac{\alpha(ak)^2}{2}, \quad g_n = 0, \quad n > 2, \quad (6.2.23)$$

$$h_1 = -ak \left(1 + \frac{3}{4} \beta(ak)^2\right), \quad h_2 = 0, \quad h_3 = \frac{\beta(ak)^3}{4}, \quad h_n = 0, \quad n > 3. \quad (6.2.24)$$

По формулам (6.2.17), (6.2.18) определим отличные от нуля коэффициенты разложения функции u

$$v_0 = \frac{1}{2} \alpha a^2, \quad v_2 = \frac{\alpha a^2}{6}, \quad w_3 = -\frac{\beta a^3 k}{32}. \quad (6.2.25)$$

Из вторых формул (6.2.19) и (6.2.23) следует, что $B = 0$, поэтому уравнение (6.2.16) дает

$$\psi = kt + C_1, \quad (6.2.26)$$

так что решение в первом по ε приближении приобретает вид

$$y = a \cos \psi + \varepsilon \left(\frac{\alpha a^2}{2} + \frac{\alpha a^2}{6} \cos 2\psi - \frac{\beta a^3 k}{32} \sin 3\psi \right), \quad (6.2.27)$$

т.е. груз совершает колебательное движение вблизи точки, несколько смещенной от положения статического равновесия, и представляющее собой суперпозицию трех колебаний с кратными частотами. Коэффициенты всех гармоник определяются параметром a , который нужно найти с помощью уравнения (6.2.15) с учетом первых формул (6.2.19) и (6.2.24). Решению подлежит, следовательно, дифференциальное уравнение

$$\frac{da}{dt} = \frac{\varepsilon a}{2} \left(1 + \frac{3}{4} \beta a^2 k^2\right). \quad (6.2.28)$$

Переменные в этом уравнении разделяются, так что интегрирование обеих частей полученного соотношения дает

$$\int \frac{da}{a \left(1 + \frac{3}{4} \beta a^2 k^2 \right)} = \frac{\varepsilon t}{2} + C_2. \quad (6.2.29)$$

Для сокращения записи введем обозначение

$$s = \frac{3}{4} \beta k^2, \quad (6.2.30)$$

а числитель и знаменатель подынтегральной функции умножим на a , в результате чего получим

$$\int \frac{da}{a \left(1 + \frac{3}{4} \beta a^2 k^2 \right)} = \int \frac{ada}{a^2 (1 + sa^2)}. \quad (6.2.31)$$

Далее, произведем замену переменной

$$z = a^2, \quad dz = 2ada, \quad (6.2.32)$$

поэтому интеграл в правой части (6.2.31) примет вид

$$\int \frac{ada}{a^2 (1 + sa^2)} = \frac{1}{2} \int \frac{dz}{z(1 + sz)}. \quad (6.2.33)$$

Этот интеграл теперь можно вычислить путем разложения подынтегральной функции на простые дроби

$$\frac{1}{z(1 + sz)} = \frac{D}{z} + \frac{E}{1 + sz} = \frac{D(1 + sz) + Ez}{z(1 + sz)},$$

откуда следует, что должно выполняться условие

$$D(1 + sz) + Ez = 1$$

и, следовательно, $D = 1$, $E = -s$, поскольку коэффициенты при одинаковых степенях переменной z у многочленов в обеих сторонах последнего равенства должны совпадать. В результате получается следующее:

$$\int \frac{dz}{z(1 + sz)} = \int \left(\frac{1}{z} - \frac{s}{1 + sz} \right) dz = \ln z - \ln(1 + sz) = \ln \frac{z}{1 + sz} = \ln \frac{a^2}{1 + sa^2}. \quad (6.2.34)$$

Подставив полученный результат с учетом (6.2.33) в (6.2.29), будем иметь

$$\frac{1}{2} \ln \frac{a^2}{1+sa^2} = \frac{\varepsilon t}{2} + C_2,$$

или

$$\ln \frac{a^2}{1+sa^2} = \varepsilon t + C_2.$$

Отсюда найдем зависимость амплитуды a от времени

$$a = \sqrt{\frac{e^{\varepsilon t + C_2}}{1 - se^{\varepsilon t + C_2}}}. \quad (6.2.35)$$

Из полученного выражения и определений (6.2.12), (6.2.30) вытекают следующие следствия:

1) если $b_1 > 0$, а $b_3 < 0$, а, значит, $\varepsilon > 0$ и $s < 0$, то при $t \rightarrow \infty$ $a \rightarrow \sqrt{-\frac{1}{s}} = \sqrt{\frac{4b_1}{3|b_3|k^2}}$, т.е. колебания выходят на стационарный режим с постоянной амплитудой, не зависящей от начальных условий; это и есть автоколебания;

2) если $b_1 < 0$, то $\varepsilon < 0$ и $a \rightarrow 0$ тоже независимо от начальных условий; как видно из (6.2.27) никаких колебаний при этом нет: груз все время будет находиться в покое в положении статического равновесия.

Тема 7. Лекция 8. Виброзащита

Колебания, которым было уделено так много внимания, являются чрезвычайно широко распространенным типом движения различных машин и их отдельных частей. Они могут быть полезными в тех случаях, когда действие машины основано на колебательных эффектах (виброгрохоты, вибромельницы, вибрационные установки для уплотнения бетонных смесей и т.д.), но одновременно имеют отрицательную составляющую, поскольку передаются прилегающим конструкциям и могут нарушать планируемые законы движения машин и систем управления. Из-за вибрации увеличиваются динамические нагрузки в элементах конструкций, в результате чего снижается несущая способность деталей и даже возникает их разрушение. Вибрация порождает шум и оказывает вредное воздействие на человека, который всегда находится вблизи машины.

Поэтому и возникает необходимость в методах оценки и способах уменьшения виброактивности. Совокупность таких методов называют виброзащитой.

Различают два основных способа защиты от колебаний: виброизоляция и виброгашение. При этом в исследуемой механической системе выделяют две подсистемы, соединенные между собой некоторыми связями. Одна из частей, в которой происходят процессы, вызывающие колебания, называется источником колебаний, вторая представляет ту часть механической системы, колебания в которой требуется уменьшить, и она называется объектом виброзащиты. Например, двигатель, установленный на фундаменте, имеет неуравновешенный ротор. Источником колебаний в данном случае является ротор, объектом виброзащиты – корпус двигателя или фундамент.

4.1 Линейный виброизолятор при силовом возбуждении

Рассмотрим простейшую систему виброзащиты с одной степенью свободы, представленную на рис. 40.

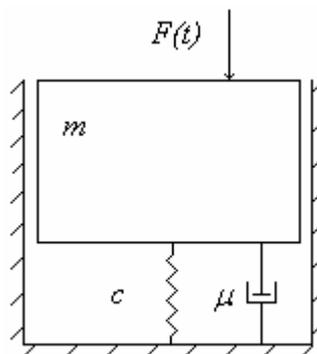


Рис. 40

Здесь источником колебаний является объект массы m , находящийся под действием гармонической возмущающей силы

$$F(t) = H \sin pt. \quad (7.1.1)$$

Объектом виброзащиты является фундамент, на котором расположен источник. В качестве виброизолятора между источником и основанием установлены упругий элемент (или элементы) жесткости c и демпфер вязкого трения, характеризуемый параметром μ . Назначение виброизолятора состоит в уменьшении динамической нагрузки на основание.

Выбрав начало координат в положении статического равновесия и направив ось x по вертикали, уравнение движения машины можно записать в виде

$$m\ddot{x} = -cx - \mu\dot{x} + H \sin pt,$$

или после приведения его к стандартному виду

$$\ddot{x} + 2b\dot{x} + k^2x = h \sin pt, \quad (7.1.2)$$

где, как обычно,

$$k^2 = \frac{c}{m}, \quad 2b = \frac{\mu}{m}, \quad h = \frac{H}{m}. \quad (7.1.3)$$

Соотношение (7.1.2) – это уже рассматривавшееся ранее уравнение вынужденных колебаний. Из-за наличия сил сопротивления свободные колебания быстро затухают, поэтому интерес представляют только вынужденные колебания, т.е. частное решение этого уравнения. Было установлено, что оно имеет вид

$$x = A \sin(pt + \delta), \quad (7.1.4)$$

причем амплитуда A определяется выражением

$$A = \frac{h}{\sqrt{(k^2 - p^2)^2 + 4b^2 p^2}}, \quad (7.1.5)$$

параметр δ сейчас интереса не представляет.

В задаче виброизоляции существенным является не столько закон движения источника, сколько динамическое усилие

$$R = cx + \mu\dot{x}, \quad (7.1.6)$$

передаваемое основанию. Подставив сюда (7.1.4), получим

$$R = cA \sin(pt + \delta) + \mu p A \cos(pt + \delta). \quad (7.1.7)$$

Положим далее

$$cA = R_0 \cos \varepsilon, \quad (7.1.8)$$

$$\mu p A = R_0 \sin \varepsilon. \quad (7.1.9)$$

Тогда выражение (7.1.7) можно привести к виду

$$R = R_0 \sin(pt + \delta + \varepsilon), \quad (7.1.10)$$

где

$$R_0 = A \sqrt{c^2 + \mu^2 p^2}. \quad (7.1.11)$$

Для количественной оценки эффективности защиты от колебаний вводится так называемый коэффициент виброизоляции как отношение амплитуды динамического воздействия на защищаемый объект к амплитуде возмущающей силы:

$$\gamma = \frac{R_0}{H}. \quad (7.1.12)$$

Защита считается эффективной, когда этот коэффициент меньше единицы. Подставив сюда выражения (7.1.11) и (7.1.5) с учетом (7.1.3), получим

$$\begin{aligned} \gamma &= \frac{\sqrt{c^2 + \mu^2 p^2}}{m \sqrt{(k^2 - p^2)^2 + 4b^2 p^2}} = \frac{\sqrt{\left(\frac{c}{m}\right)^2 + \left(\frac{\mu}{m}\right)^2 p^2}}{\sqrt{(k^2 - p^2)^2 + 4b^2 p^2}} = \\ &= \frac{\sqrt{k^4 + 4b^2 p^2}}{\sqrt{(k^2 - p^2)^2 + 4b^2 p^2}}. \end{aligned} \quad (7.1.13)$$

Для упрощения анализа полученного выражения представим его в безразмерной форме, вынеся из-под знаков радикалов в числителе и знаменателе четвертую степень собственной частоты системы и введя безразмерные параметры

$$\lambda = \frac{b}{k}, \quad z = \frac{p}{k}. \quad (7.1.14)$$

Коэффициент виброизоляции тогда примет вид

$$\gamma = \frac{\sqrt{1 + 4\lambda^2 z^2}}{\sqrt{(1 - z^2)^2 + 4\lambda^2 z^2}}, \quad (7.1.15)$$

т.е. он зависит от двух безразмерных параметров, один из которых (λ) связан с силами вязкого сопротивления, а второй (z) – с частотой возмущающей силы. Из (7.1.15) видно, что при больших значениях λ коэффициент γ близок к единице, а при $\lambda=0$ он равен

$$\gamma = \frac{1}{|1 - z^2|}. \quad (7.1.16)$$

Рассмотрим разность числителя и знаменателя подкоренного выражения в (7.1.15) при некотором конечном значении λ :

$$\Delta = 1 + 4\lambda^2 z^2 - [(1 - z^2)^2 + 4\lambda^2 z^2] = z^2(2 - z^2). \quad (7.1.17)$$

Эта разность, оказывается, не зависит от λ . При $z = 0$ и $z = \sqrt{2}$ она равна нулю, т.е. числитель и знаменатель одинаковы и, следовательно, $\gamma = 1$. При $z < \sqrt{2}$ $\Delta > 0$. Это означает, что числитель больше знаменателя, и поэтому $\gamma > 1$. Если же $z > \sqrt{2}$, то $\Delta < 0$ – числитель меньше знаменателя и $\gamma < 1$.

Таким образом, на интервале $0 < z < \sqrt{2}$ коэффициент $\gamma > 1$ и достигает максимума в точке, определяемой из условия обращения в нуль от подкоренного выражения (7.1.15) по z . Обозначим

$$f(z) = \frac{1 + 4\lambda^2 z^2}{(1 - z^2)^2 + 4\lambda^2 z^2}. \quad (7.1.18)$$

Поскольку величина z положительна по определению и в последнем выражении фигурируют только ее четные степени, введем для упрощения новую величину $u = z^2$. Тогда (7.1.18) переписется так:

$$f(u) = \frac{1 + 4\lambda^2 u}{(1 - u)^2 + 4\lambda^2 u}. \quad (7.1.19)$$

Вычислим производную от f по u и приравняем ее к нулю:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial u} &= \frac{4\lambda^2}{(1 - u)^2 + 4\lambda^2 u} - \frac{(1 + 4\lambda^2 u)[4\lambda^2 - 2(1 - u)]}{[(1 - u)^2 + 4\lambda^2 u]^2} = \\ &= 2 \frac{1 - u - 2\lambda^2 u^2}{[(1 - u)^2 + 4\lambda^2 u]^2} = 0, \end{aligned}$$

то есть

$$1 - u - 2\lambda^2 u^2 = 0. \quad (7.1.20)$$

Положительным решением этого квадратного уравнения является величина

$$u_1 = \frac{\sqrt{1 + 8\lambda^2} - 1}{4\lambda^2}. \quad (7.1.21)$$

Вторая производная от f по u равна

$$\frac{\partial^2 f}{\partial u^2} = -2 \frac{1 + 4\lambda^2 u}{[(1-u)^2 + 4\lambda^2 u]^2} + 4 \frac{(1-u - 2\lambda^2 u^2)[4\lambda^2 - 2(1-u)]}{[(1-u)^2 + 4\lambda^2 u]^3}$$

и она отрицательна при $u = u_1$, что свидетельствует о максимальнойности f в этой точке. При этом

$$\begin{aligned} \gamma_{\max} &= \sqrt{f(u_1)} = \sqrt{\frac{8\lambda^4}{8\lambda^4 - 4\lambda^2 - 1 + \sqrt{1 + 8\lambda^2}}} = \\ &= \sqrt{\frac{1 + 4\lambda^2 - 8\lambda^4 + \sqrt{1 + 8\lambda^2}}{8\lambda^2(1 - \lambda^2)}}. \end{aligned} \quad (7.1.22)$$

Эта величина, как уже отмечалось, больше единицы при любых значениях λ , и она тем больше, чем меньше λ , как это представлено на рис. 41.

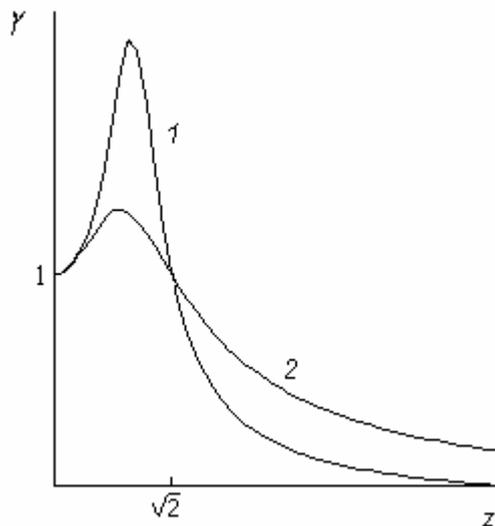


Рис. 41

Кривая 1 соответствует меньшему значению λ , чем кривая 2.

Как уже отмечалось, виброзащитная система является эффективной в том случае, когда коэффициент виброизоляции меньше единицы, поскольку при этом амплитуда силы, действующей на объект защиты, меньше амплитуды силы возмущающей. Проведенный анализ и рисунок свидетельствуют о том, что это условие выполняется при $z > \sqrt{2}$, или при $p > \sqrt{2}k$. Имея в виду определение собственной частоты системы (первая формула (7.1.3)), условие эффективности виброзащиты можно представить в виде

$$p > \sqrt{\frac{2c}{m}}. \quad (7.1.23)$$

Частота возмущающей силы, вообще говоря, может быть какой угодно, и повлиять на нее для улучшения последнего неравенства практически невозможно. Но параметры системы поддаются регулировке, так что, подбирая соответствующие значения жесткости и массы, всегда можно обеспечить выполнение условия (7.1.23) и, следовательно, сделать защиту от колебаний эффективной. Параметр λ , связанный с коэффициентом сопротивления, при этом тоже играет определенную роль: при выполнении условия (7.1.23), как это видно из рис. 41, γ уменьшается с уменьшением λ .

7.2 Линейный виброизолятор при кинематическом возбуждении

Рассмотрим случай, когда основание 2 движется по заданному закону, а виброизолятор выбирается так же, как и ранее, рис. 42.

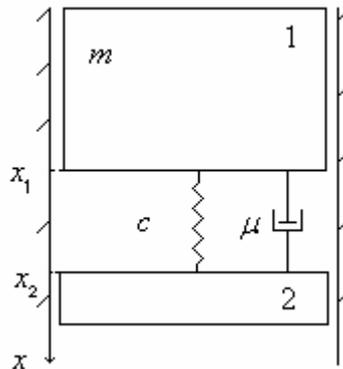


Рис. 42

Будем считать, что закон этого движения имеет вид

$$x_2 = H \sin pt. \quad (7.2.1)$$

Объектом защиты теперь будем считать машину 1. Выбрав начало координат в положении статического равновесия, запишем уравнение движения машины

$$m\ddot{x}_1 = -c(x_1 - x_2) - \mu(\dot{x}_1 - \dot{x}_2), \quad (7.2.2)$$

поскольку сила сопротивления зависит от относительной скорости. Перепишем это уравнение в стандартной форме с учетом того, что вследствие (7.2.1)

$$\dot{x}_2 = Hp \cos pt, \quad (7.2.3)$$

и поэтому

$$\ddot{x}_1 + 2b\dot{x}_1 + k^2 x_1 = H(k^2 \sin pt + 2bp \cos pt), \quad (7.2.4)$$

где, как обычно, $2b = \mu/m$, $k^2 = c/m$. По указанным ранее причинам, свободные колебания интереса не представляют, а частное решение этого уравнения будем искать в виде

$$x_1 = A \sin(pt + \delta). \quad (7.2.5)$$

Тогда

$$\dot{x}_1 = Ap \cos(pt + \delta), \quad (7.2.6)$$

$$\ddot{x}_1 = -Ap^2 \sin(pt + \delta), \quad (7.2.7)$$

в результате чего уравнение (7.2.4) принимает вид

$$\begin{aligned} & -Ap^2 \sin(pt + \delta) + 2bAp \cos(pt + \delta) + Ak^2 \sin(pt + \delta) = \\ & = H(k^2 \sin pt + 2bp \cos pt), \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} & A(k^2 - p^2)(\sin pt \cos \delta + \cos pt \sin \delta) + 2bAp(\cos pt \cos \delta - \sin pt \sin \delta) = \\ & = H(k^2 \sin pt + 2bp \cos pt). \end{aligned} \quad (7.2.8)$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых тригонометрических функциях, получим систему уравнений

$$A(k^2 - p^2) \cos \delta - 2bpA \sin \delta = Hk^2, \quad (7.2.9)$$

$$A(k^2 - p^2) \sin \delta + 2bAp \cos \delta = 2Hbp, \quad (7.2.10)$$

из которой после возведения обеих частей в квадрат и почленного сложения следует

$$A = H \frac{\sqrt{k^4 + 4(bp)^2}}{\sqrt{(k^2 - p^2)^2 + 4(bp)^2}}. \quad (7.2.11)$$

Определив коэффициент виброизоляции как отношение амплитуды колебаний объекта защиты к амплитуде колебаний основания, получим

$$\gamma = \frac{A}{H} = \frac{\sqrt{k^4 + 4(bp)^2}}{\sqrt{(k^2 - p^2)^2 + 4(bp)^2}}, \quad (7.2.12)$$

т.е. в данном случае коэффициент виброизоляции имеет точно такой же вид, как и при силовом возбуждении, рассмотренном выше.

Из изложенного следует, что система виброизоляции эффективна только в том случае, когда собственная частота системы мала по сравнению с частотой возмущения. Для обеспечения низкой собственной частоты изолируемого объекта можно увеличить его массу, либо уменьшить жесткость упругого элемента изолятора.

Тема 8. Лекция 9. Динамическое гашение колебаний

Наряду с виброизоляцией используются также различные способы гашения колебаний. Идея динамического гашения колебаний состоит в присоединении к объекту виброзащиты дополнительных устройств, которые изменяют его вибрационное состояние. Изменение вибрационного состояния объекта может осуществляться как путем перераспределения энергии от объекта к гасителю, так и в направлении увеличения рассеяния энергии колебаний. Первый случай относится к так называемым инерционным динамическим гасителям, которые применяются для подавления моногармонических или узкополосных колебаний. При действии вибрационных нагрузок более широкого частотного диапазона предпочтительней оказывается иной способ, основанный на повышении диссипативных свойств системы. Динамические гасители такого типа называются поглотителями колебаний.

Рассмотрим систему, представленную на рис. 43.

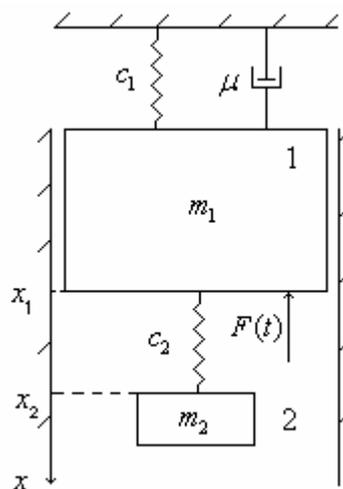


Рис. 43

Объектом виброзащиты в данном случае является тело 1, связанное с неподвижным корпусом виброизолятором жесткости c_1 и демпфером μ ; будем считать, что силы вязкого сопротивления пропорциональны скорости. На него также действует переменная сила $F(t) = H \sin pt$. Присоединим к телу 1 с помощью пружины жесткостью c_2 дополнительный груз 2. Такая система имеет две степени свободы. В качестве обобщенных координат выберем x_1 и x_2 , определяющих положения грузов относительно их положений статического равновесия.

Тогда поведение системы будет описываться двумя уравнениями Лагранжа

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_1} \right) - \frac{\partial T}{\partial x_1} = -\frac{\partial U}{\partial x_1} + Q_1, \quad (8.1.1)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_2} \right) - \frac{\partial T}{\partial x_2} = -\frac{\partial U}{\partial x_2} + Q_2, \quad (8.1.2)$$

где Q_1, Q_2 - непотенциальные части обобщенных сил.

Потенциальная энергия при указанном выборе обобщенных координат будет иметь вид

$$U = -P_1 x_1 - P_2 x_2 + \frac{1}{2} c_1 [(x_1 + \lambda_1)^2 - \lambda_1^2] + \frac{1}{2} c_2 [(x_2 - x_1 + \lambda_2)^2 - \lambda_2^2], \quad (8.1.3)$$

где λ_1 и λ_2 - статические удлинения пружин под действием сил тяжести \vec{P}_1 и \vec{P}_2 соответственно. Тогда

$$-\frac{\partial U}{\partial x_1} = P_1 - c_1(x_1 + \lambda_1) + c_2(x_2 - x_1 + \lambda_2), \quad (8.1.4)$$

$$-\frac{\partial U}{\partial x_2} = P_2 - c_2(x_2 - x_1 + \lambda_2). \quad (8.1.5)$$

В положении статического равновесия, т.е. при $x_1 = 0$ и $x_2 = 0$, обобщенные силы обращаются в нуль, поэтому

$$P_1 - c_1 \lambda_1 + c_2 \lambda_2 = 0, \quad (8.1.6)$$

$$P_2 - c_2 \lambda_2 = 0, \quad (8.1.7)$$

в результате чего выражения (8.1.4), (8.1.5) упрощаются:

$$-\frac{\partial U}{\partial x_1} = -c_1 x_1 + c_2(x_2 - x_1) = -(c_1 + c_2)x_1 + c_2 x_2, \quad (8.1.8)$$

$$-\frac{\partial U}{\partial x_2} = -c_2(x_2 - x_1). \quad (8.1.9)$$

Поскольку непотенциальные силы действуют только на груз 1, движущийся поступательно, то

$$Q_1 = F(t) - \mu \dot{x}_1, \quad Q_2 = 0. \quad (8.1.10)$$

Кинетическая энергия системы в данном случае имеет простую форму

$$T = \frac{m_1 \dot{x}_1^2}{2} + \frac{m_2 \dot{x}_2^2}{2},$$

поэтому уравнения (8.1.1), (8.1.2) с учетом сказанного выше примут вид

$$m_1 \ddot{x}_1 = -(c_1 + c_2)x_1 + c_2 x_2 - \mu \dot{x}_1 + H \sin pt, \quad (8.1.11)$$

$$m_2 \ddot{x}_2 = -c_2(x_2 - x_1). \quad (8.1.12)$$

Из-за наличия сил сопротивления свободные колебания в системе быстро затухнут, так что интерес представляют только вынужденные колебания, определяемые частным решением этих уравнений. Будем искать его в виде

$$x_1 = A_1 \sin pt + B_1 \cos pt, \quad (8.1.13)$$

$$x_2 = A_2 \sin pt + B_2 \cos pt. \quad (8.1.14)$$

Вычислим производные от приведенных выражений

$$\dot{x}_1 = A_1 p \cos pt - B_1 p \sin pt,$$

$$\dot{x}_2 = A_2 p \cos pt - B_2 p \sin pt,$$

$$\ddot{x}_1 = -A_1 p^2 \sin pt - B_1 p^2 \cos pt,$$

$$\ddot{x}_2 = -A_2 p^2 \sin pt - B_2 p^2 \cos pt$$

подставим их в уравнения (8.1.11), (8.1.12)

$$-m_1 p^2 (A_1 \sin pt + B_1 \cos pt) = -(c_1 + c_2)(A_1 \sin pt + B_1 \cos pt) +$$

$$+ c_2 (A_2 \sin pt + B_2 \cos pt) - \mu p (A_1 \cos pt - B_1 \sin pt) + H \sin pt,$$

$$-m_2 p^2 (A_2 \sin pt + B_2 \cos pt) = -c_2 [(A_2 - A_1) \sin pt + (B_2 - B_1) \cos pt]$$

и приравняем в обеих частях полученных равенств коэффициенты при одинаковых тригонометрических функциях (все слагаемые, содержащие неизвестные величины, перенесем в левую часть):

$$(c_1 + c_2 - m_1 p^2) A_1 - c_2 A_2 - \mu p B_1 = H, \quad (8.1.15)$$

$$\mu p A_1 + (c_1 + c_2 - m_1 p^2) B_1 - c_2 B_2 = 0, \quad (8.1.16)$$

$$-c_2 A_1 + (c_2 - m_2 p^2) A_2 = 0, \quad (8.1.17)$$

$$-c_2 B_1 + (c_2 - m_2 p^2) B_2 = 0. \quad (8.1.18)$$

Из (8.1.17) и (8.1.18) следует

$$A_1 = \frac{c_2 - m_2 p^2}{c_2} A_2, \quad (8.1.19)$$

$$B_1 = \frac{c_2 - m_2 p^2}{c_2} B_2. \quad (8.1.20)$$

Для сокращения записи введем обозначения

$$\alpha = \frac{c_2 - m_2 p^2}{c_2}, \quad \beta = c_1 + c_2 - m_1 p^2. \quad (8.1.21)$$

Подставив (8.1.18), (8.1.19) с учетом (8.1.21) в (8.1.15) и (8.1.16), получим

$$(\beta\alpha - c_2)A_2 - \mu\alpha B_2 = H, \quad (8.1.22)$$

$$\mu\alpha A_2 + (\beta\alpha - c_2)B_2 = 0. \quad (8.1.23)$$

Из (8.1.23) тогда следует

$$A_2 = -\frac{\beta\alpha - c_2}{\mu\alpha} B_2, \quad (8.1.24)$$

что после подстановки в (8.1.22) дает

$$-\frac{(\beta\alpha - c_2)^2}{\mu\alpha} B_2 - \mu\alpha B_2 = H$$

и поэтому

$$B_2 = -\frac{\mu\alpha H}{(\beta\alpha - c_2)^2 + (\mu\alpha)^2}. \quad (8.1.25)$$

Из (8.1.24) тогда следует

$$A_2 = \frac{\beta\alpha - c_2}{(\beta\alpha - c_2)^2 + (\mu\alpha)^2} H, \quad (8.1.26)$$

а из (8.1.19) и (8.1.20) -

$$A_1 = \frac{\alpha(\beta\alpha - c_2)}{(\beta\alpha - c_2)^2 + (\mu p \alpha)^2} H, \quad (8.1.27)$$

$$B_1 = -\frac{\mu p \alpha^2}{(\beta\alpha - c_2)^2 + (\mu p \alpha)^2} H. \quad (8.1.28)$$

Таким образом, определены все коэффициенты, относящиеся к вынужденным колебаниям тел 1 и 2. При этом оказывается, что коэффициенты, определяющие движение защищаемого объекта, пропорциональны, как это видно из (8.1.27) и (8.1.28), параметру $\alpha = c_2 - m_2 p^2$. Если подобрать такие значения c_2 и m_2 , что $\alpha = 0$, то A_1 и B_1 обратятся в нули, и, стало быть, объект защиты не будет совершать никаких колебаний, т.е. добавочный груз погасит колебания объекта и будет двигаться при этом по закону

$$x_2 = -\frac{H}{c_2} \sin pt.$$

Как следует из сказанного выше, виброгашение такого типа эффективно только для одной фиксированной частоты. При произвольном изменении возмущающей силы используются поглотители колебаний вязкого типа.