Учреждение образования
«Белорусский государственный технологический университет»

# Конспект лекций по дисциплине «Динамика машин и виброзащита»

Для студентов III и IV курсов заочного факультета специальностей:
1-36 07 01 «Машины и аппараты химических производств и предприятий строительных материалов»;

Лектор: доцент Грода Я.Г.

Минск, БГТУ
2014 г.

# Лекция 1.
# **Динамика упругих систем**
## • Введение

Как правило в курсах теоретической механики и теории машин и механизмов рассматривались жесткие системы, которые, как уже отмечалось, являются определенной идеализацией реальных, т. е. деформируемых систем. В некоторых случаях приближения абсолютно твердых систем вполне достаточно для выяснения качественных и даже количественных характеристик. Но существует множество ситуаций, когда с помощью такого приближения нельзя объяснить динамическое поведение устройства, и поэтому необходимо учитывать упругие свойства системы. При этом возникают серьезные проблемы, связанные с бесконечным числом степеней свободы таких систем, рассмотрение которых выходят далеко за рамки нашего курса. Однако в зависимости от характера изучаемого явления и требуемого уровня строгости можно ограничить число учитываемых степеней свободы, выбирая в качестве расчетной схемы реальной конструкции систему с конечным числом степеней свободы или даже одной.

Ограничение числа учитываемых в расчете степеней свободы может быть выполнено различными способами. Часто в реальной конструкции можно выделить массивные элементы, деформацией которых можно пренебречь, и упругие элементы с малыми массами. Пренебрежение этими массами снимает необходимость рассмотрения проблем динамики упругих тел. В этом случае расчетная схема представляет собой ряд жестких массивных тел, соединенных невесомыми упругими связями.

При этом только в простейших случаях потенциальная энергия упругих сил (даже в случае справедливости закона Гука) оказывается квадратичной по параметрам, определяющим положение системы, в общем же случае зависимость оказывается иной, что приводит к нелинейным уравнениям. Наиболее удобным средством для получения уравнений движения таких систем являются уравнения Лагранжа второго рода

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\alpha}\right)-\frac{\partial T}{\partial q_\alpha}=-\frac{\partial U}{\partial q_\alpha}+Q_\alpha, \qquad (\alpha=1,2,...,s),$$

где $T$ и $U$ – кинетическая и потенциальная энергии системы, $Q_\alpha$ – непотенциальные обобщенные силы, $q_\alpha$ – обобщенные координаты, $\dot{q}_\alpha$ – обобщенные скорости, $s$ – число степеней свободы.

## • Определение положения устойчивого равновесия

Консервативная система, т.е. система, на которую действуют только потенциальные силы, описывается уравнениями вида:

.

Напомним, что если есть такие значения обобщенных координат $q_\alpha^0$, при которых все производные от потенциальной энергии равны нулю

$$\left.\frac{\partial U}{\partial q_\alpha}\right|_{q_\alpha = q_\alpha^0} = 0 \qquad (\alpha=1,2,...,s),$$

то такое положение системы называется равновесным. Если это положение равновесия является устойчивым, то при малых отклонениях $q_\alpha$ от $q_\alpha^0$ и малых скоростях $\dot{q}_\alpha$ система будет совершать колебательное движение вблизи этого устойчивого положения равновесия. Достаточное условие устойчивости положения равновесия определяется теоремой Лагранжа-Дирихле: если в положении равновесия консервативной системы с идеальными и стационарными связями потенциальная энергия имеет изолированный минимум, то такое положение равновесия является устойчивым.

В случае системы с одной степенью свободы это означает

$$\left.\frac{\partial U}{\partial q}\right|_{q=q^0} = 0, \quad \left.\frac{\partial^2 U}{\partial q^2}\right|_{q=q^0} > 0,$$

для систем с несколькими степенями свободы критерий устойчивости имеет более сложный вид. Без ограничения общности будем считать, что $q_\alpha^0 = 0$ и $U(0) = 0$ (выбор нулевой точки потенциальной энергии всегда позволяет это сделать).

- **Свободные колебания системы с одной степенью свободы**

Рассмотрим сначала наиболее простой случай свободных колебаний механической системы с одной степенью свободы, который описывается уравнением:

$$m\ddot{q} + cq = 0.$$

В данном случае индексы у инерционного и квазиупругого коэффициентов опущены.

Данное уравнение можно использовать для описания, например, поведения машинного агрегата на упругом фундаменте, представленном на рис. 1, части формовочной машины и т. д.

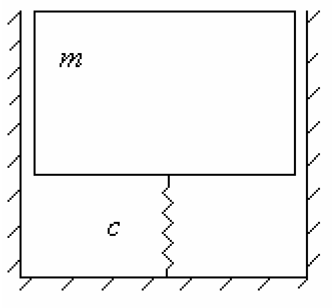



Рис. 1

Запишем это уравнение в стандартной форме, разделив обе части на $m$ и введя обозначение

$$k^2 = \frac{c}{m},$$

что можно сделать, поскольку коэффициенты $m$ и $c$ положительны:

$$\ddot{q} + k^2 q = 0.$$

Это однородное линейное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами. Его решение будем искать в виде

$$q = Ce^{\lambda t},$$

где $C$ и $\lambda$ – постоянные величины, подлежащие определению. Решением уравнения является то, что обращает его в тождество, поэтому подставив предполагаемое решение в исходное уравнение получим

$$C(\lambda^2 + k^2)e^{\lambda t} = 0.$$

Последнее равенство выполняется тождественно, т. е. для любого значения $t$, если

$$\lambda^2 + k^2 = 0.$$

Коэффициент $C$ не может равняться нулю, поскольку тривиальные (нулевые) решения однородного уравнения нас не интересуют.

Полученное алгебраическое уравнение называется характеристическим уравнением исходного дифференциального уравнения, и оно имеет мнимые корни

$$\lambda_1 = ik, \quad \lambda_2 = -ik.$$

которым соответствует решение

$$q = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt = A \sin(kt + \delta)$$

где постоянные интегрирования $C_1$, $C_2$ либо $A$ и $\delta$ могут быть определены по начальным условиям

$$\mathrm{tg}\delta = \frac{q_0 k}{v_0}, \qquad A = \sqrt{q_0^2 + \frac{v_0^2}{k^2}}.$$

Период колебаний

$$T = \frac{2\pi}{k} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{c}}$$

определяется только свойствами системы. График таких колебаний представлен на рис. 2.

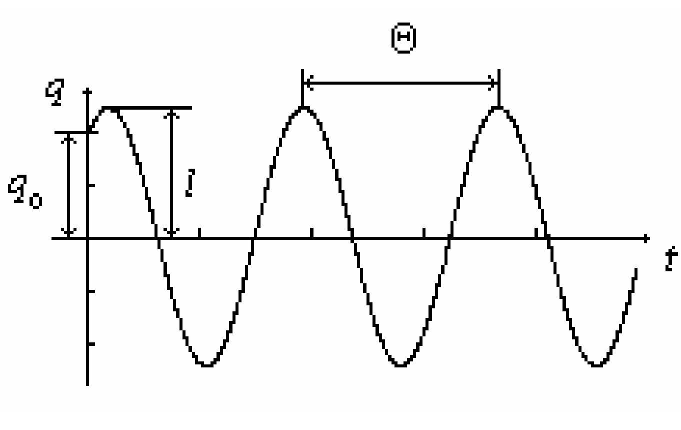


Рис. 2

- **Вынужденные колебания при учете сил вязкого сопротивления**

Рассмотрим модель машины на упругом основании с подключенным демпфером, характеризуемым коэффициентом μ, на которую действует переменная сила $F(t)$, рис. 3. Как и ранее, такая система имеет одну степень свободы.

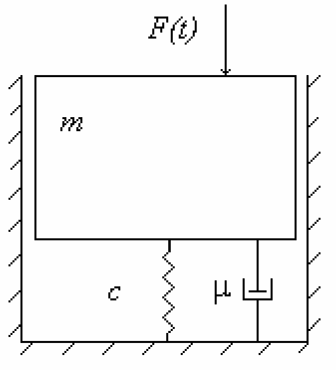



Рис. 3

Уравнение движения данной системы будет иметь вид

$$m\ddot{q} = -cq - \mu\dot{q} + F(t).$$

Приведем его к стандартной форме, перенеся члены, содержащие $q$ и $\dot{q}$, в левую часть и разделив все слагаемые на $m$. При этом введем обозначения

$$k^2 = \frac{c}{m},\ \ 2b = \frac{\mu}{m},\ \ f(t) = \frac{F(t)}{m}.$$

Тогда будем иметь

$$\ddot{q} + 2b\dot{q} + k^2 q = f(t).$$

Общее решение этого линейного неоднородного уравнения, как обычно, представляется суммой общего решения $q_1$ соответствующего однородного уравнения

$$\ddot{q}_1 + 2b\dot{q}_1 + k^2 q_1 = 0$$

и частного решения неоднородного уравнения.

Проводя рассуждения аналогичные рассуждениям для случая свободных колебаний получаем:

$$q_1 = Ae^{-bt}\sin(\Omega t + \delta)$$

где

$$\Omega = \sqrt{k^2 - b^2}\ .$$

Данное решение описывает так называемые затухающие колебания, поскольку видно, что решение однородного уравнения при учете сил сопротивления описывает колебательный процесс с экспоненциально убывающей со временем амплитудой. Их общий вид представлен на рис. 4.

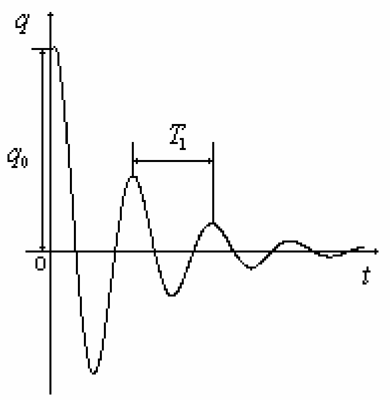



Рис. 4

В качестве возмущающей силы опять рассмотрим гармонически изменяющуюся величину

$$F(t) = H \sin pt .$$

В этом случае частное решение исходного дифференциального уравнения может быть представлено в форме

$$q_2 = B \sin(pt + \varepsilon) .$$

где

$$B = \frac{h}{\sqrt{(k^2 - p^2)^2 + 4b^2 p^2}}, \quad \tan \varepsilon = \frac{2bp}{p^2 - k^2} .$$

- **Амплитудно–частотная характеристика вынужденных колебаний при вязком сопротивлении**

Введем понятие коэффициента динамичности

$$\gamma = \frac{Ac}{H}$$

как отношение амплитуды вынужденных колебаний к статическому отклонению от положения равновесия под действием постоянной силы *H.* Тогда $\gamma$ примет вид

$$\gamma = \frac{hc}{\sqrt{(k^2 - p^2) + 4b^2 p^2}} = \frac{Hc}{m\sqrt{(k^2 - p^2) + 4b^2 p^2}} = \frac{k^2}{\sqrt{(k^2 - p^2) + 4b^2 p^2}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{p^2}{k^2}\right)^2 + \frac{4b^2 p^2}{k^4}}} .$$

Для более компактной записи введем безразмерные величины

$$z = \frac{p}{k}, \quad \beta = \frac{b}{k},$$

в результате чего коэффициент динамичности запишется в безразмерной форме

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{(1 - z^2)^2 + 4\beta^2 z^2}}.$$

Рассмотрим более подробно зависимость $\gamma$ от $z$ (т.е. от частоты возмущающей силы). Как видно из последнего равенства, $\gamma = 1$ при $z = 0$, а при $z \to \infty$ $\gamma \to 0$. Рассмотрим функцию от $z$, которая стоит под знаком радикала,

$$y = (1 - z^2)^2 + 4\beta^2 z^2,$$

и исследуем ее на наличие экстремума. Для этого вычислим производную от $y$ по $z$ и приравняем ее нулю:

$$y' = -4(1 - z^2)z + 8\beta^2 z = 4z(2\beta^2 - 1 + z^2) = 0.$$

Корнями этого уравнения являются

$$z_1 = 0, \quad z_2 = \sqrt{1 - 2\beta^2}.$$

При нахождении $z_2$ взят положительный знак перед радикалом, поскольку величина $z$ положительна по определению. Для существования этого корня необходимо, чтобы $\beta$ удовлетворяла условию $\beta < \frac{1}{\sqrt{2}}$: только в этом случае подкоренное выражение будет положительным. Если это не так, то такого корня не существует.

Вычислим теперь вторую производную от $y$:

$$y'' = 4(2\beta^2 - 1 + z^2) + 8z^2.$$

Для первого корня имеем

$$y''(z_1) = 4(2\beta^2 - 1) = \begin{cases} < 0, & \beta < \frac{1}{\sqrt{2}} \\ > 0, & \beta > \frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases}.$$

Первый случай соответствует максимуму $y$ и, следовательно, минимуму $\gamma$, второй – минимуму $y$ и максимуму $\gamma$. Если корень $z_2$ существует, то

$$y''(z_2) = 8(1 - 2\beta^2) > 0,$$

т.е. $y$ при этом значении минимально и, следовательно, $\gamma$ максимально. При этом

$$\gamma_{\max} = \frac{1}{2\beta\sqrt{1-\beta^2}},$$

т.е. высота этого максимума становится тем больше, чем меньше $\beta$ (чем меньше сопротивление), оставаясь конечной величиной. Между прочим, $\gamma$ остается конечным и в случае резонанса, когда $z = 1$. Поведение коэффициента динамичности в зависимости от частоты возмущающей силы при различном сопротивлении представлены на рис. 5.

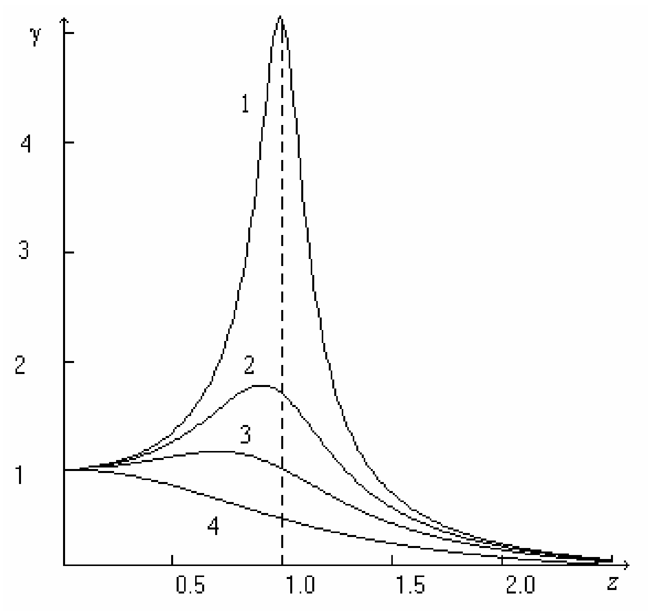



Рис. 5

Кривые 1 – 3 соответствуют условию существования корня $z_2$ ($\beta$=0.1; 0.3; 0.5 соответственно), при этом максимум тем выше, чем меньше коэффициент сопротивления, а кривая 4 – его отсутствию ($\beta$=0.9). Существенным является то, что при больших сопротивлениях ($\beta > 1/\sqrt{2}$) и больших частотах ($z > 1$, или $p > k$) амплитуда вынужденных колебаний меньше статического смещения.

# Лекция 2.
## Динамика жестких систем

- **Введение**

Описание реальных механизмов с учетом всех их особенностей представляет собой очень сложную проблему, поэтому при теоретическом исследовании используются идеализированные модели, дающие возможность учесть основные детали конструкции в приближенной (упрощенной) форме. С этой точки зрения механические системы можно разделить на две категории: жесткие и упругие.

В первом случае элементы (звенья), составляющие систему, считаются абсолютно твердыми, т.е. недеформирующимися под действием сил или моментов. Поскольку деформации звеньев, как правило, малы по сравнению с размерами машин, решение многих задач динамики будет при этом мало отличаться от точного. Но даже считая все звенья абсолютно твердыми, не удается избавиться от всех трудностей, поскольку только системы с круглыми дисками описываются достаточно простыми линейными уравнениями, а системы, в состав которых входят массивные стержни, описываются уже нелинейными дифференциальными уравнениями, теория которых далека от завершения.

С еще большими трудностями приходится сталкиваться при описании  упругих систем, когда все элементы машин, передающие движение, а также не-сущие части считаются упругими (деформирующимися). Даже с учетом того, что деформации являются не слишком большими и не проявляются гистерезисные эффекты, число степеней свободы в таких системах оказывается бесконечным и их динамическое поведение определяется уравнениями, находящимися далеко за рамками нашего курса. К вопросу о том, как поступать в данном случае, мы вернемся позже, а сначала сосредоточимся на рассмотрении жестких систем.

- **Уравнения движения механизмов с жесткими звеньями**

Динамическое поведение систем, состоящих из абсолютно твердых тел, описывается двумя группами уравнений, одна из которых имеет векторный характер (теоремы о движении центра масс и изменении момента импульса, принцип Даламбера), а вторая – скалярный (теорема об изменении кинетической энергии, общее уравнение динамики, уравнения Лагранжа второго рода). В уравнения первой группы так или иначе входят реакции связей, наложенных на систему, уравнения второй группы реакций связей (идеальных) не содержат, так что они непосредственно и определяют уравнения движения – связь между действующими активными силами и соответствующими ускорениями.

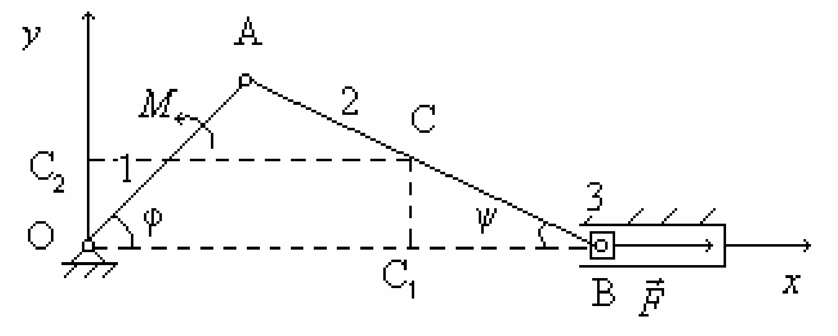
Задачи динамики жестких систем заключаются в том, чтобы по заданным силам или моментам определить закон движения системы или по заданному закону движения определить силы, под действием которых оно происходит. Поэтому применение тех или иных уравнений и диктуется стоящими перед исследователем вопросами. В данном курсе мы будем использовать уравнения Лагранжа, имея в виду их наибольшую общность в получении уравнений движения для систем с произвольным числом степеней свободы.

Начнем с простейшего случая системы с одной степенью свободы, для которой необходимо только одно уравнение Лагранжа

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}}\right)-\frac{\partial T}{\partial q}=Q,$$

где $q$ и $\dot{q}$ – обобщенные координата и обобщенная скорость соответственно, $T$ – кинетическая энергия системы, $Q$ – обобщенная сила

В качестве примера составления уравнения движения рассмотрим один из самых распространенных механизмов, использующийся, например, в поршневых компрессорах, механических прессах, – кривошипно-ползунный, представленный на рис.1. Он состоит из двух однородных стержней 1 и 2, длины которых $l_1$ и $l_2$, и ползуна 3, массы их равны $m_1$, $m_2$ и $m_3$ соответственно. На кривошип 1, который может вращаться вокруг неподвижной оси, проходящей через т. О, действует пара сил, момент которой равен *M*, на ползун 3, движущийся поступательно внутри цилиндра, действует сила $\vec{F}$, шатун 2 при этом совершает плоское движение. Кинетическая энергия такой системы равна




Ри $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\alpha}\right)-\frac{\partial T}{\partial q_\alpha}=-\frac{\partial U}{\partial q_\alpha}$ с. 1

сумме кинетических энергий этих трех тел

$$T=T_1+T_2+T_3,$$

причем

$$T_1=\frac{1}{2}I_1\omega_1^2,\quad T_2=\frac{1}{2}m_2v_C^2+\frac{1}{2}I_C\omega_2^2,\quad T_3=\frac{1}{2}m_3v_3^2.$$

Механизм имеет одну степень свободы. В качестве обобщенной координаты выберем угол поворота кривошипа 1, т.е. положим $q=\varphi$. Все скорости, фигурирующие в (1.1.14)–(1.1.16), нужно выразить через обобщенную скорость, которой в данном случае будет угловая скорость кривошипа: $\dot{q}=\dot{\varphi}=\omega_1$. Проще всего это можно сделать в координатной форме. Из рисунка видно, что

$$x_C=l_1\cos\varphi+\frac{1}{2}l_2\cos\psi,\quad y_C=\frac{1}{2}l_2\sin\psi,\quad x_3=l_1\cos\varphi+l_2\cos\psi,$$

поэтому проекции скорости центра масс звена 2 на оси равны

$$\dot{x}_C = -l_1\dot{\varphi}\sin\varphi - \frac{1}{2}l_2\dot{\psi}\sin\psi, \quad \dot{y}_C = \frac{1}{2}l_2\dot{\psi}\cos\psi,$$

а скорость ползуна определяется выражением

$$\dot{x}_3 = -l_1\dot{\varphi}\sin\varphi - l_2\dot{\psi}\sin\psi,$$

что дает возможность написать

$$v_C^2 = \dot{x}_C^2 + \dot{y}_C^2 = l_1^2\dot{\varphi}^2\sin^2\varphi + l_1l_2\dot{\varphi}\dot{\psi}\sin\varphi\sin\psi + \frac{1}{4}l_2^2\dot{\psi}^2,$$

$$v_3^2 = \dot{x}_3^2 = l_1^2\dot{\varphi}^2\sin^2\varphi + l_2^2\dot{\psi}^2\sin^2\psi + 2l_1l_2\dot{\varphi}\dot{\psi}\sin\varphi\sin\psi.$$

Угловая скорость шатуна определяется производной по времени от угла $\psi$:

$$\omega_2 = \dot{\psi}.$$

Теперь остается только выразить угол $\psi$ через $\varphi$. Это можно сделать с помощью теоремы синусов, в соответствии с которой

$$\frac{l_1}{\sin\psi} = \frac{l_2}{\sin\varphi},$$

откуда следует

$$\sin\psi = \frac{l_1}{l_2}\sin\varphi$$

и, следовательно,

$$\dot{\psi}\cos\psi = \frac{l_1}{l_2}\dot{\varphi}\cos\varphi,$$

или

$$\dot{\psi} = \dot{\varphi}\frac{l_1\cos\varphi}{l_2\sqrt{1-\sin^2\psi}} = \dot{\varphi}\frac{l_1\cos\varphi}{l_2\sqrt{1-\frac{l_1^2}{l_2^2}\sin^2\varphi}} = \dot{\varphi}\frac{l_1\cos\varphi}{\sqrt{l_2^2 - l_1^2\sin^2\varphi}}.$$

Т.о. получим следующее выражение для кинетической энергии системы

$$T = \frac{\omega_1^2}{2}\left\{ I_1 + m_2l_1^2\left( \sin^2\varphi + \frac{l_1\sin^2\varphi\cos\varphi}{\sqrt{l_2^2 - l_1^2\sin^2\varphi}} + \frac{l_2^2\cos^2\varphi}{4(l_2^2 - l_1^2\sin^2\varphi)} \right) + \right.$$

$$+I_C\frac{l_1^2\cos^2\varphi}{l_2^2-l_1^2\sin^2\varphi}+m_3l_1^2\left(\sin^2\varphi+\frac{l_1^2\sin^2\varphi\cos^2\varphi}{l_2^2-l_1^2\sin^2\varphi}+\frac{2l_1\sin^2\varphi\cos\varphi}{\sqrt{l_2^2-l_1^2\sin^2\varphi}}\right)\Bigg\}=$$

$$=\frac{\omega_1^2}{2}\Bigg\{I_1+(m_2+m_3)l_1^2\sin^2\varphi+\frac{l_1^2\cos^2\varphi(m_2l_2^2+3m_3l_1^2\sin^2\varphi)}{3(l_2^2-l_1^2\sin^2\varphi)}+$$

$$+\frac{(m_2+2m_3)l_1^2\sin^2\varphi\cos\varphi}{\sqrt{l_2^2-l_1^2\sin^2\varphi}}\Bigg\}.$$

Здесь было использовано выражение для момента инерции стержня 2 относительно оси, проходящей через его центр масс, т.е.

$$I_C=\frac{m_2l_2^2}{12}.$$

Из полученного соотношения видно, что инерционный коэффициент $m(\varphi)$ в данном случае равен множителю в последних фигурных скобках и имеет размерность момента инерции (его еще называют приведенным моментом инерции). Производная от него по обобщенной координате будет иметь весьма громоздкий вид, поэтому упростим задачу, считая кривошип и шатун одинаковыми стержнями, т.е. положим $m_1=m_2=m,\ l_1=l_2=l$. Тогда

$$m(\varphi)=\frac{2}{3}ml^2+2(m+2m_3)l^2\sin^2\varphi$$

и

$$m'(\varphi)=2(m+2m_3)l^2\sin 2\varphi.$$

Теперь определим обобщенную силу. Для этого нужно сообщить системе возможное перемещение и найти работу всех активных сил на этом перемещении. Для простоты будем считать, что механизм расположен в горизонтальной плоскости – это снимет вопрос о работе сил тяжести. При этом необходимо придерживаться правила: выбор направления возможного перемещения должен быть таким, чтобы работа движущих сил была положительной. Будем считать таковой вращающий момент *M*, тогда возможным перемещением кривошипа будет поворот на угол $\delta\varphi$ против хода часовой стрелки. Работа активных сил будет равна

$$\delta A=M\delta\varphi+\vec{F}\cdot\delta\vec{r}_3=M\delta\varphi+F_x\delta x_3.$$

учитывая, что

$$\delta x_3=-2l\sin\varphi\delta\varphi,$$

что после подстановки дает

$$\delta A = (M - 2Fl\sin\varphi)\delta\varphi.$$

Коэффициент при $\delta\varphi$ в последнем выражении и есть обобщенная сила:

$$Q = M - 2Fl\sin\varphi.$$

Т.о. подставляя все определенные величины в уравнение Лагранжа получаем

$$\left[\frac{2}{3}ml^2 + 2(m+2m_3)l^2\sin^2\varphi\right]\ddot{\varphi} + (m+2m_3)l^2\dot{\varphi}^2\sin 2\varphi = M - 2Fl\sin\varphi.$$

Как видим, даже в простейшем случае уравнение, описывающее динамическое поведение механизма, является нелинейным независимо от того, что представляют собой силовые факторы $M$ и $F$, а они, вообще говоря, могут быть функциями $\varphi$ и $\dot{\varphi}$.

- **Решение уравнений динамики жестких систем в простейших случаях**

Ранее было установлено, что уравнение движения системы с одной степенью свободы имеет вид

$$m(q)\ddot{q} + \frac{1}{2}\frac{dm(q)}{dq}\dot{q}^2 = Q.$$

При наличии в системе стержней (а это - скорее правило, чем исключение) оно является нелинейным и его аналитическое решение возможно только в исключительных случаях. При невозможности отыскания аналитического решения, даже приближенного, следует обращаться к численным методам, реализуемым с помощью вычислительной техники, которые позволяют решать уравнения произвольной сложности. Имея все-таки в виду аналитические возможности, рассмотрим простейшие варианты, так называемые интегрируемые случаи, считая инерционный коэффициент постоянной величиной, которую в дальнейшем будем обозначать просто буквой $m$. Тогда второе слагаемое в исходном уравнении выпадает, и уравнение приобретает существенно более простой вид

$$m\ddot{q} = Q.$$

Обобщенная сила при этом может зависеть от $t$, $q$, $\dot{q}$ или их комбинации.

1. Простейшим является случай постоянной силы: $Q$ =const (гиревой привод, например). Для сокращения записи обозначим

$$a = \frac{Q}{m}.$$

Уравнение движения примет вид тогда примет вид

$$\ddot{q} = a.$$

Решением дифференциального уравнения, как известно, является функция, подстановка которой в уравнение обращает его в тождество. Процесс нахождения такой функции называется интегрированием дифференциального уравнения и для каждого типа дифференциального уравнения этот процесс реализуется по-своему. Есть, однако, способ, применимый к весьма широкому кругу задач динамики, который называется методом разделения переменных. Его идея очень проста. Интеграл представляет собой выражение вида

$$\int f(x)dx,$$

поэтому нужно представить обе части дифференциального уравнения в виде функции какой-то переменной, умноженной на дифференциал этой же переменной, что и позволит выполнить интегрирование. Но для этого уравнение второго порядка нужно свести сначала к системе двух уравнений первого порядка. Введем новую переменную

$$\frac{dq}{dt} = v,$$

тогда уравнение примет вид

$$\frac{dv}{dt} = a.$$

Полученная система двух уравнений первого порядка эквивалентна уравнению второго порядка и в них возможно разделение переменных. Умножим обе части последнего уравнения на *dt*:

$$dv = adt.$$

Обе части полученного уравнения имеют вид подынтегрального выражения, поэтому

$$\int dv = \int adt = a\int dt$$

и, следовательно,

$$v = at + C_1,$$

где $C_1$ - произвольная постоянная.

$$\frac{dq}{dt} = at + C_1.$$

Переменные опять разделяются путем умножения обеих частей на *dt*

$$dq = (at + C_1)dt$$

и в результате интегрирования

$$\int dq = \int (at + C_1)$$

получаем закон движения

$$q = \frac{at^2}{2} + C_1 t + C_2 .$$

Это – хорошо известный закон равноускоренного движения. В таком виде, однако, он не представляет какого- либо интереса, поскольку содержит две произвольные постоянные. Физический смысл имеют решения, удовлетворяющие заданным начальным условиям. Для уравнений второго порядка, каковыми являются все динамические уравнения, необходимо задать положение и скорость в начальный момент времени (его всегда можно считать нулевым), т.е. задать состояние системы в начальный момент времени

$$q(0) = q_0, \quad \dot{q}(0) = v_0 .$$

В этом случае задача имеет единственное решение. Нетрудно видеть, что это требование приводит к тому, что

$$C_1 = v_0, \quad C_2 = q_0,$$

поэтому частное решение уравнения, удовлетворяющее начальным условиям, приобретает вид

$$q = \frac{at^2}{2} + v_0 t + q_0 .$$

Следует отметить, что только в случае равноускоренного движения произвольные постоянные имеют такой простой физический смысл.

2. Движение под действием сил, зависящих от времени: $Q = Q(t)$. Обозначим $a(t)=Q(t)/m$, опять введем новую переменную

$$\frac{dq}{dt} = v ,$$

в результате чего уравнение примет вид

$$\frac{dv}{dt} = a(t) .$$

Разделив в нем переменные и выполнив интегрирование, получим

$$v = \int a(t)dt + C_1 = f_1(t) + C_1 ,$$

где вид функции $f_1(t)$ может быть определен после задания конкретного вида $Q(t)$. Подстановка выражения для скорости в уравнение движения, разделение переменных и интегрирование приводит к следующему:

$$q = \int f_1(t)dt + C_1 t + C_2 .$$

Постоянные интегрирования, разумеется, должны быть определены по начальным условиям.

3. Движение под действием сил, зависящих от положения: $Q = Q(q)$. Обозначив через $a(q) = Q(q)/m$, получим тем же способом, что и выше

$$\frac{dq}{dt} = v,$$

$$\frac{dv}{dt} = a(q).$$

В этом случае ускорение не зависит явно от времени, а только через $q$, такая же зависимость должна быть и у скорости, т.е. она должна рассматриваться как сложная функция времени и поэтому

$$\frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dq}\frac{dq}{dt} = \frac{dv}{dq}v,$$

в результате чего уравнение принимает вид

$$v\frac{dv}{dq} = a(q),$$

переменные в котором разделяются, а интегрирование после этого дает

$$\frac{v^2}{2} = \int a(q)dq + C_1 = f(q) + C_1,$$

где через $f$ обозначен фигурирующий слева интеграл. Из последнего соотношения следует

$$v = \pm\sqrt{2(f(q) + C_1)}$$

и тогда

$$\frac{dq}{dt} = \pm\sqrt{2(f(q) + C_1)},$$

т.е. переменные опять разделяются и поэтому

$$\pm\int \frac{dq}{\sqrt{2(f(q) + C_1)}} = t + C_2.$$

Неоднозначность, обусловленная извлечением квадратного корня в данном соотношении, снимается в каждом конкретном случае определенными физическими соображениями. Обратив полученное соотношение, получим зависимость координаты от времени:

$$q = f_1(t, C_1, C_2).$$

4. Движение под действием сил, зависящих от скорости: $Q = Q(\dot{q})$. Уравнение движения в этом случае эквивалентно системе

$$\frac{dq}{dt} = v, \qquad \frac{dv}{dt} = a(v),$$

где обозначено $a(v) = Q(v)/m$. Переменные разделяются путем деления обеих частей на *a* и умножения на *dt.* Интегрирование полученного выражения дает

$$t = \int \frac{dv}{a(v)} + C_1 = f(v, C_1),$$

откуда следует

$$v = f^{-1}(t, C_1),$$

где $f^{-1}$ - функция, обратная *f.* Подстановка полученного решения в исходное выражение приводит к уравнению с разделяющимися переменными, решение которого определяет закон движения

$$q = \int f^{-1}(t, C_1)dt + C_2.$$

# Лекция 3.

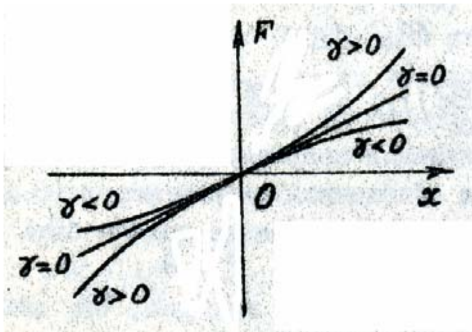
## Вынужденные колебания нелинейных системах

- **Введение**

При изучении колебаний механических систем в качестве модели упругих взаимодействий, как правило, принимают закон Гука, утверждающий о линейной связи между упругой силой и деформацией. Это приводит к линейным дифференциальным уравнениям движения, методы интегрирования которых хорошо разработаны. Однако в общем случае сила взаимодействия между телами $\mathbf{F}(x)$ является нелинейной функцией взаимного перемещения тел $x$., и закон Гука является лишь первым членом в разложении $\mathbf{F}$ по $x$. Последующие нелинейные члены во многих случаях, хотя и являются малыми, приводят к качественно новым особенностям в поведении механических систем.

Предположим, что сила взаимодействия по модулю одинакова как для положительных, так й для отрицательных значений деформации $x$ и, следовательно, является нечетной функцией $x$: $\mathbf{F}(-x)$=- $\mathbf{F}(x)$. Её разложение в ряд по $x$ не будет содержать четных степеней $x$. Ограничиваясь учетом первых двух членов разложения получаем

$$\mathbf{F}(x) = -\left(cx + \gamma x^3\right)$$




Графически зависимость силы от координаты (квазиупругая характеристика) показана на рис. 1. При $\gamma$=0 получается обычная линейная характеристика, при $\gamma$>0 **упругую характеристику** называют **жесткой**, а при $\gamma$<0 – **мягкой**.

В качестве примера такой нелинейной системы может быть рассмотрен математический маятник. Если не использовать условие малости колебаний ($\sin\varphi\approx\varphi$) то дифференциальное уравнение его движения имеет вид

$$\ddot{\varphi} = -\frac{g}{l}\sin\varphi$$

Проводя разложение функции $\sin\varphi$ в ряд имеем

$$\ddot{\varphi} = -\frac{g}{l}\left(\varphi - \frac{\varphi^3}{3!} + \ldots\right).$$

Т.о. нелинейная характеристика маятника является мягкой.

Дифференциальное уравнение движения механической системы с одной степенью свободы и квазиупругой характеристикой имеет вид

$$m\ddot{x} = -cx - \gamma x^3 + F(t)$$

где $m$ – коэффициент инерции, рассматриваемый как постоянная величина; $\mathbf{F}(t)$ – зависящая от времени сила, действующая на систему.

- **Собственные колебания нелинейной системы**

Рассмотрим собственные колебания нелинейной системы при $\mathbf{F}(t)$=0. Уравнение движения перепишем в форме

$$\ddot{x} + k^2 x + \gamma_0 x^3 = 0$$

где

$$k^2 = \frac{c}{m}, \quad \gamma_0 = \frac{\gamma}{m}.$$

Для нахождения решения используем метод гармонического баланса. Суть метода состоит в том, что решение записывается в виде разложения в ряд Фурье вида:

$$x = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos n\omega t + B_n \sin n\omega t,$$

а коэффициенты $A$, $B$ и частота ω определяются из условия, что все коэффициенты разложения левой части уравнения в ряд Фурье должны быть равны нулю.

Подставляя предлагаемое решение в исходное уравнение и используя соотношения для перехода от степеней тригонометрических функций к функциям кратных аргументов, например,

$$\cos^3 \omega t = \frac{1}{4}\left(3\cos\omega t + \cos 3\omega t\right),$$

$$\cos^2 \omega t \cos 3\omega t = \frac{1}{2}\cos 3\omega t + \frac{1}{4}\left(\cos\omega t + \cos 5\omega t\right)$$

получаем:

1. $A_0=0$;
2. $B_k=0$ для любого $k$;
3. $A_{2k}=0$;

Собирая коэффициенты стоящие при $\cos\omega t$ и $\cos 3\omega t$ с учетом трех первых отличных от нуля коэффициентов $A$ получаем:

$$(k^2-\omega^2)A_1 + \gamma_0\left(\frac{3}{4}A_1\left[A_1^2 + A_1A_3 + 2A_3^2 + 2A_5^2\right] + \frac{3}{4}A_3^2A_5 + \ldots\right) = 0$$

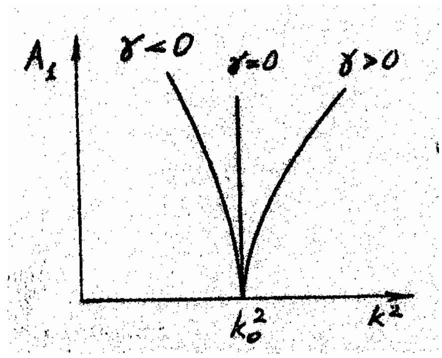
$$(k^2-9\omega^2)A_3 + \gamma_0\left(\frac{1}{4}A_1^2\left[A_1 + 6A_3 + 3A_5\right] + \frac{3}{4}A_3^3 + \frac{3}{2}A_3A_5^2 \ldots\right) = 0$$

Очевидно, что описанная процедура может быть продолжена рассмотрением коэффициентов стоящих при $\cos 3\omega t$ и т.д.

Т.к. искомое решение достаточно быстро сходится полученную систему уравнений можно решать **методом итераций** (то есть методом последовательных приближений). В рамках данного подхода в первом из уравнений пренебрегаем коэффициентами $A_3$ и $A_5$. В результате получим зависимость между частотой ω и амплитудой $A_1$ основной гармоники

$$\omega^2 = k^2 + \frac{3}{4}\gamma_0 A_1^2$$

Кривые, определяемые полученным уравнением, называют **скелетными характеристиками**. Они показаны на рисунке для мягкой (γ<0), жесткой (γ>0) квазиупругой характеристики и для линейной системы (γ=0). Из полученной зависимости следует важный вывод: ***частота свободных нелинейных колебаний зависит от их амплитуды.***




Пренебрегая $A_5$ с учетом найденного ω из второго соотношения получаем:

$$32k^2A_3 + 21\varepsilon A_1^2A_3 = \varepsilon A_1^3$$

$$A_3 = \frac{\gamma/_c\,A_1^2}{32 + 21\,\gamma/_c\,A_1^2}A_1$$

Аналогичным образом можно определить $A_5$, а затем использовать $A_3$ и $A_5$ для уточнения частоты колебаний ω. Однако эти поправки малы и, как правило, ими можно пренебречь. Тем не менее, сам факт наличия в решении уравнения гармоник разных частот является важной отличительной чертой свободных нелинейных колебаний.

## • Вынужденные нелинейные колебания

Рассмотрим гармоническую вынуждающую силу

$$F = mf_0\cos\omega t$$

Уравнение движения в этом случае примет вид

$$\ddot{x} + k^2x + \gamma_0x^3 = f_0\cos\omega t$$

С учетом результатов исследования свободных колебаний решение данного уравнения будем искать в виде

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} A_{2n-1}\cos(2n-1)\omega t$$

По аналогии с результатами для свободных колебаний получаем

$$(k^2-\omega^2)A_1 + \gamma_0\frac{3}{4}\left[A_1^3 + A_1^2A_3 + 2A_1A_3^2\right] + \ldots = f_0$$

$$(k^2-9\omega^2)A_3 + \gamma_0\frac{1}{4}\left[A_1^3 + 6A_1^2A_3 + 3A_3^2A_1\right] + \ldots = 0$$

Как и в случае свободных колебаний полагаем $A_3$ и из первого соотношения получаем

$$(k^2-\omega^2)A_1 + \gamma_0\frac{3}{4}A_1^3 = f_0.$$

называется центром масс или центром инерции механической системы.

Анализируя дискриминант данного кубического уравнения

$$A_1^3 + \frac{4}{3}\frac{k^2-\omega^2}{\gamma_0}A_1 - \frac{4}{3}\frac{f_0}{\gamma_0} = 0.$$

$$D = \left(\frac{4}{9}\frac{k^2-\omega^2}{\gamma_0}\right)^3 + \left(\frac{2}{3}\frac{f_0}{\gamma_0}\right)^2$$

находим, что при $\gamma_0>0$ оно имеет один корень при

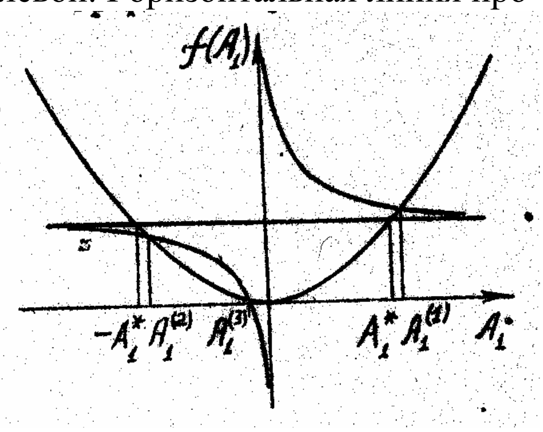
$$\omega^2 \le k^2 + \frac{9}{4}\gamma_0\left(\frac{2}{3}\frac{f_0}{\gamma_0}\right)^{2/3}$$

и три корня при противоположном знаке неравенства. Для мягкой характеристики ($\gamma_0$<0) знак неравенства в следует изменить на противоположный: один корень соответствует высоким частотам, а три корня - низким. При $\omega$=$\omega$*, определяемом знаком равенства в, происходит бифуркация решений нелинейного уравнения.

Построим амплитудно-частотные характеристики. Для этого предварительно исследуем свойства решений уравнения полученного дифференциального уранения. Перепишем его в виде

$$\omega^2 - k^2 + \frac{f_0}{A_1} = \frac{3}{4}\gamma_0 A_1^2.$$

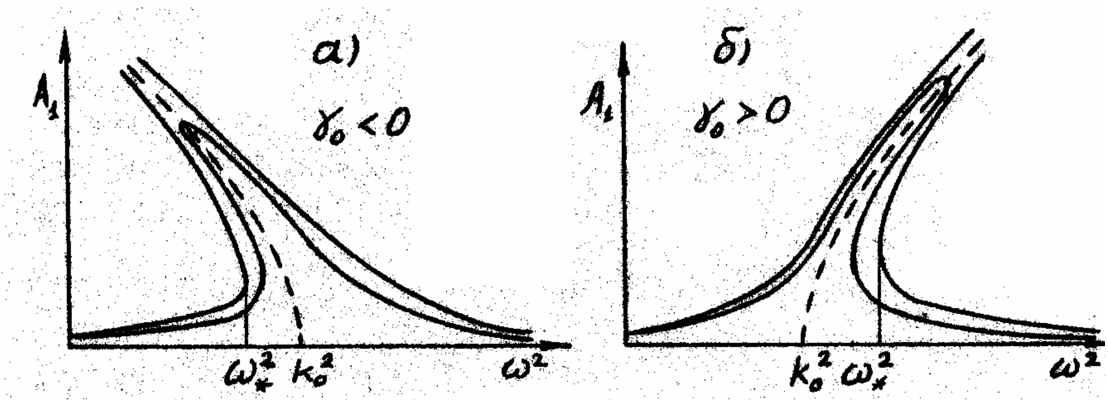
Графическое решение этого уравнения при $\varepsilon$>0 показано на рисунке. По вертикальной оси откладывается значение функции, по горизонтальной оси – $A_1$. Парабола соответствует правой части уравнения, гиперболы -левой. Горизонтальная линия проведена на уровне $\omega^2$-$k^2$, и ее пересечения с параболой определяют значения $\pm A^*_1$ амплитуды свободных колебаний нелинейной системы, соответствующие частоте $\omega$.




Из трех корней уравнения один положительный $A_1^{(1)}$>$A^*_1$ и два отрицательных, причем $A_1^{(2)}$ при не слишком малых значениях $\omega^2$-$k^2$ близок к -$A^*_1$ и |$A_1^{(2)}$|<$A^*_1$. Третий корень тоже отрицателен и по модулю значительно меньше $A^*_1$.

Амплитудно–частотчые характеристики, построенные для модулей амплитуд, изображены на рисунке. Как следует из приведенного выше рисунка, две ветви амплитудно-частотной характеристики охватывают скелетную кривую, которая на показана пунктирной линией. Для мягкой характеристики на гиперболы будут лежать не в первой и третьей четвертях, а во второй и четвертой.

Если отсутствуют диссипативные силы, ветви, охватывающие скелетную кривую, не смыкаются. При наличии линейного по скорости сопротивления эти две ветви по аналогии с линейной системой смыкаются между собой.

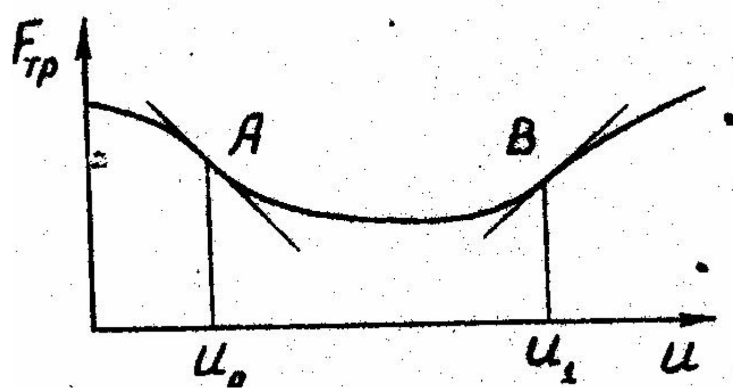


# Лекция 4

# Вынужденные колебания нелинейных системах при непериодическом внешнем воздействии. Автоколебания

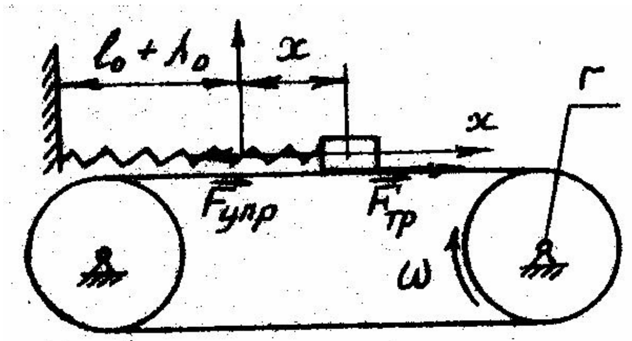
## • Введение

Рассмотрим другой тип систем, нелинейность которых обусловлена сложной зависимостью силы сопротивления движению от относительной скорости. В частности, известно, что усилие, необходимое для того, чтобы сдвинуть тело, находящееся на шероховатой поверхности, больше силы, необходимой для поддержания движения тела с постоянной скоростью по той же поверхности. Поэтому иногда вводят понятие о коэффициентах трения покоя $f_1$ и скольжения $f$, причем $f_1>f$. Реально переход от $f_1$ к $f$ происходит не скачкообразно, а на некотором интервале относительных скоростей тел. Зависимость силы трения проходит через минимум при некотором значении скорости и затем, по мере её увеличения, сила трения начинает возрастать. Качественно зависимость силы трения от относительной скорости тела и подложки изображена на рисунке




## • Постановка задачи

Рассмотрим механическую систему изображенную на рисунке. На ленте транспортера, движущейся со скоростью $\omega r$, находится тело, прикрепленное к неподвижной стенке с помощью пружины. Пусть сила трения между тело и лентой транспортера зависит от их относительной скорости $u=\omega r-\dot{x}$ так, как указано на рисунке. Подберем угловую скорость вращения барабана транспортера так, чтобы $u_0=\omega r$, где $u_0$ соответствует тому значению $u$, при котором кривая $F_{тр}(u)$ имеет точку перегиба.




Движение груза определяется уравнением

$$m\ddot{x}=F_{тр}-F_{упр}.$$

Предполагая, что амплитуда колебаний груза не слишком велика, силу трения разложим в ряд Тейлора

$$F_{тр}(u) = F_{тр}(u_0 + \Delta u) = F_{тр}(u_0) + \left.\frac{dF_{тр}(u)}{du}\right|_{u=u_0} \Delta u +$$

$$+\frac{1}{2!}\left.\frac{d^2F_{тр}(u)}{du^2}\right|_{u=u_0} \left(\Delta u\right)^2 + \frac{1}{3!}\left.\frac{d^3F_{тр}(u)}{du^3}\right|_{u=u_0} \left(\Delta u\right)^3 + \ldots$$

где $\Delta u = u - u_0 = -\dot{x}$. Ограничиваясь 3-мя первыми слагаемыми и учитывая что второй член разложения равен 0 в силу условия точки перегиба функции имеем:

$$F_{тр}(u) = F_{тр}(u_0) + \mu_1\dot{x} - \gamma_1\dot{x}^3$$

где $\mu_1 = -\left.\frac{dF_{тр}(u)}{du}\right|_{u=u_0}$, $\gamma_1 = \frac{1}{3!}\left.\frac{d^3F_{тр}(u)}{du^3}\right|_{u=u_0}$. Для зависимости изображенной на рисунке оба введенных коэффициента положительны.

Для силы упругости можем записать, что

$$F_{упр} = c(\lambda_0 + x),$$

где $\lambda_0$ - смещение начала координат от конца недеформированной пружины. Т.о. получаем следующее дифференциальное уравнение для описания движения груза

$$m\ddot{x} = F_{тр}(u_0) + \mu_1\dot{x} - \gamma_1\dot{x}^3 - c\lambda_0 - cx\,.$$

Выбирая $\lambda_0$ из условия $F_{тр}(u_0) = c\lambda_0$, имеем

$$\ddot{x} + k^2x = \mu\dot{x} - \gamma\dot{x}^3,$$

где

$$k^2 = \frac{c}{m}, \quad \mu = \frac{\mu_1}{m}, \quad \gamma = \frac{\gamma_1}{m}.$$

Обсудим качественно свойства решения полученного нелинейного уравнения. Прежде всего отметим, что ото уравнение моделирует систему с отрицательным сопротивлением, так как пропорциональная первой степени скорости составляющая силы трения входит в его правую часть с положительным знаком. Следовательно, в малой окрестности начала координат на фазовой плоскости, когда слагаемым $-\gamma\dot{x}^3$ можно пренебречь, система будет вести себя, как в окрестности неустойчивого фокуса. Однако по мере увеличения амплитуды колебаний все сильнее начинает проявляться второе слагаемое правой части. Если ввести механическую энергию груза на пружине

$$e = \frac{1}{2}\left(m\dot{x}^2 + cx^2\right),$$

то можно записать, что

$$\frac{de}{dt} = \mu_1\dot{x}^2 - \gamma_1\dot{x}^4$$

В некоторый момент поступление энергии в систему, обусловленное первым слагаемым, будет компенсировано её рассеянием вследствие второго слагаемого. Наступит установившееся движение с некоторой амплитудой, когда отклонения в сторону больших амплитуд будут подавляться вторым слагаемым правой части, а в сторону меньших амплитуд – первым. Другими словами, установившийся режим будет **устойчивым**.

Отличительной особенностью рассмотренных колебаний является то, что они возбуждаются от источника энергии неколебательного характера – лента транспортера движется с постоянной скоростью. Такие колебания называют **автоколебаниями**.

- ## Метод медленно меняющихся амплитуд

Для последовательного решения нелинейного уравнения используем **метод медленно меняющихся амплитуд**, предложенный Ван-дер-Полем. Решение будем искать в виде

$$x(t) = a(t)\cos\left(kt + \varphi(t)\right)$$

Решение записывается как бы в виде гармонических колебаний, но их амплитуда и фаза предполагаются зависящими от времени. Находим производную по времени:

$$\dot{x}(t) = \dot{a}(t)\cos\left(kt + \varphi(t)\right) - a(t)\dot{\varphi}(t)\sin\left(kt + \varphi(t)\right) - a(t)k\sin\left(kt + \varphi(t)\right)$$

Поскольку функция времени $x(t)$ представляется через две функции $a(t)$ и $\varphi(t)$, на них можно наложить одну дополнительную связь. Выберем эту связь в виде

$$\dot{a}(t)\cos\left(kt + \varphi(t)\right) - a(t)\dot{\varphi}(t)\sin\left(kt + \varphi(t)\right) = 0$$

С учетом этого соотношения выражение для скорости принимает вид

$$\dot{x}(t) = -a(t)k\sin\left(kt + \varphi(t)\right).$$

Тогда вторая производная может быть записана в виде

$$\ddot{x}(t) = -\dot{a}k\sin\left(kt + \varphi\right) - a\dot{\varphi}k\cos\left(kt + \varphi\right) - ak^2\cos\left(kt + \varphi\right)$$

и после подстановки в исходное дифференциальное уравнение получаем

$$-\dot{a}k\sin\left(kt + \varphi\right) - a\dot{\varphi}k\cos\left(kt + \varphi\right) = \mu\dot{x} - \gamma\dot{x}^3$$

Рассматривая систему уравнений

$$\begin{cases} \dot{a}\cos\left(kt + \varphi\right) - a\dot{\varphi}\sin\left(kt + \varphi\right) = 0 \\ -\dot{a}k\sin\left(kt + \varphi\right) - a\dot{\varphi}k\cos\left(kt + \varphi\right) = \mu\dot{x} - \gamma\dot{x}^3 \end{cases}$$

разрешим ее относительно $\dot{a}$ и $\dot{\varphi}$

$$\dot{a}k = -\left(\mu\dot{x} - \gamma\dot{x}^3\right)\sin\left(kt + \varphi\right)$$

$$a\dot{\varphi}k = -\left(\mu\dot{x} - \gamma\dot{x}^3\right)\cos\left(kt + \varphi\right)$$

С учетом выражения для скорости имеем

$$\dot{a} = a\left(\mu - \gamma a^2k^2\sin^2\Phi\right)\sin^2\Phi$$

$$\dot{\Phi} = k + \left(\mu - \gamma a^2k^2\sin^2\Phi\right)\sin\Phi\cos\Phi$$

где

$$\Phi = kt + \varphi(t), \quad \dot{\Phi} = k + \dot{\varphi}(t).$$

Предполагая, что $a$ мало изменяется за один период колебаний (в этом и состоит смысл метода медленно меняющихся амплитуд), усредним полученные соотношения по периоду колебаний или, что эквивалентно, по углу Ф на промежутке от 0 до 2π. Использование этой операции позволяв трактовать метод Ван-дер-Поля как один из вариантов метода усреднения. Исторически метод Ван-дер-Поля положил начало широкому разнообразию разработанных в дальнейшем методов усреднения, используемых для исследования нелинейных колебаний.

Учитывая, что средние от величин, содержащих нечетные степени $\sin\Phi$ и $\cos\Phi$, равны нулю, а также

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\sin^2\Phi d\Phi = \frac{1}{2}, \quad \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\sin^4\Phi d\Phi = \frac{3}{8}.$$

и обозначая усредненную по периоду величину чертой над её символом, получим после усреднения уравнений

$$\dot{\bar{a}} = \frac{1}{2}\bar{a}\left(\mu - \frac{3}{4}\gamma\bar{a}^2k^2\right), \quad \dot{\Phi} = k$$

Из второго уравнения следует, что средняя по периоду частота равна частоте свободных колебаний груза без сопротивления. Первое из этих уравнений позволяет определить закон изменения медленно меняющейся амплитуды. Для этого следует перейти к временным интервалам, существенно превышающим период колебаний, и поменять в левой части операции усреднения по периоду и дифференцирования по времени. Для установившегося движения правая часть уравнения для $\dot{\bar{a}}$ равна нулю. Из этого условия получим амплитуду установившихся колебаний:

$$a_{уст}^2 = \frac{4\mu}{3\gamma k^2}$$

Таким образом, амплитуда установившихся автоколебаний не зависит от начальных условий и всецело определяется свойствами системы.

# Лекция 5

## Защита от колебаний

### • Введение

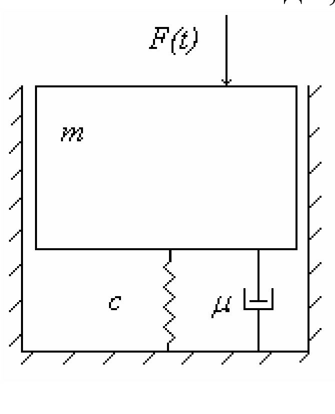
Колебания, которым было уделено так много внимания, являются чрезвычайно широко распространенным типом движения различных машин и их отдельных частей. Они могут быть полезными в тех случаях, когда действие машины основано на колебательных эффектах (виброгрохоты, вибромельницы, вибрационные установки для уплотнения бетонных смесей и т.д.), но одновременно имеют отрицательную составляющую, поскольку передаются прилегающим конструкциям и могут нарушать планируемые законы движения машин и систем управления. Из-за вибрации увеличиваются динамические нагрузки в элементах конструкций, в результате чего снижается несущая способность деталей и даже возникает их разрушение. Вибрация порождает шум и оказывает вредное воздействие на человека, который всегда находится вблизи машины.

Поэтому и возникает необходимость в методах оценки и способах уменьшения виброактивности. Совокупность таких методов называют виброзащитой.

Различают два основных способа защиты от колебаний: виброизоляция и виброгашение. При этом в исследуемой механической системе выделяют две подсистемы, соединенные между собой некоторыми связями. Одна из частей, в которой происходят процессы, вызывающие колебания, называется источником колебаний, вторая представляет ту часть механической системы, колебания в которой требуется уменьшить, и она называется объектом виброзащиты. Например, двигатель, установленный на фундаменте, имеет неуравновешенный ротор. Источником колебаний в данном случае является ротор, объектом виброзащиты – корпус двигателя или фундамент.

### • Линейный виброизолятор при силовом возбуждении

Рассмотрим простейшую систему виброзащиты с одной степенью свободы, представленную на рис. 40.




Здесь источником колебаний является объект массы $m$, находящийся под действием гармонической возмущающей силы

$$F(t) = H \sin pt .$$

Объектом виброзащиты является фундамент, на котором расположен источник. В качестве виброизолятора между источником и основанием установлены упругий элемент (или элементы) жесткости $c$ и демпфер вязкого трения, характеризуемый параметром $\mu$. Назначение виброизолятора состоит в уменьшении динамической нагрузки на основание.

Выбрав начало координат в положении статического равновесия и направив ось $x$ по вертикали, уравнение движения машины можно записать в виде

$$m\ddot{x} = -cx - \mu\dot{x} + H \sin pt ,$$

или после приведения его к стандартному виду

$$\ddot{x} + 2b\dot{x} + k^2 x = h\sin pt,$$

где, как обычно,

$$k^2 = \frac{c}{m}, \quad 2b = \frac{\mu}{m}, \quad h = \frac{H}{m}.$$

Полученное соотношение это уже рассматривавшееся ранее уравнение вынужденных колебаний. Из-за наличия сил сопротивления свободные колебания быстро затухают, поэтому интерес представляют только вынужденные колебания, т.е. частное решение этого уравнения. Было установлено, что оно имеет вид

$$x = A\sin(pt + \delta),$$

причем амплитуда $A$ определяется выражением

$$A = \frac{h}{\sqrt{(k^2 - p^2)^2 + 4b^2 p^2}},$$

параметр δ сейчас интереса не представляет.

В задаче виброизоляции существенным является не столько закон движения источника, сколько динамическое усилие

$$R = cx + \mu\dot{x},$$

передаваемое основанию. Подставив сюда полученное решение, получим

$$R = cA\sin(pt + \delta) + \mu pA\cos(pt + \delta).$$

Положим далее

$$cA = R_0 \cos\varepsilon,$$

$$\mu pA = R_0 \sin\varepsilon.$$

Тогда динамическое усилие можно привести к виду

$$R = R_0 \sin(pt + \delta + \varepsilon),$$

где

$$R_0 = A\sqrt{c^2 + \mu^2 p^2}.$$

Для количественной оценки эффективности защиты от колебаний вводится так называемый коэффициент виброизоляции как отношение амплитуды динамического воздействия на защищаемый объект к амплитуде возмущающей силы:

$$\gamma = \frac{R_0}{H}.$$

Защита считается эффективной, когда этот коэффициент меньше единицы.

$$\gamma = \frac{\sqrt{c^2 + \mu^2 p^2}}{m\sqrt{(k^2 - p^2)^2 + 4b^2 p^2}} = \frac{\sqrt{\left(\frac{c}{m}\right)^2 + \left(\frac{\mu}{m}\right)^2 p^2}}{\sqrt{(k^2 - p^2)^2 + 4b^2 p^2}} =$$

$$= \frac{\sqrt{k^4 + 4b^2 p^2}}{\sqrt{(k^2 - p^2)^2 + 4b^2 p^2}}.$$

Для упрощения анализа полученного выражения представим его в безразмерной форме, вынеся из-под знаков радикалов в числителе и знаменателе четвертую степень собственной частоты системы и введя безразмерные параметры

$$\lambda = \frac{b}{k}, \quad z = \frac{p}{k}.$$

Коэффициент виброизоляции тогда примет вид

$$\gamma = \frac{\sqrt{1 + 4\lambda^2 z^2}}{\sqrt{(1 - z^2)^2 + 4\lambda^2 z^2}},$$

т.е. он зависит от двух безразмерных параметров, один из которых ($\lambda$) связан с силами вязкого сопротивления, а второй ($z$) – с частотой возмущающей силы. Из полученного соотношения видно, что при больших значениях $\lambda$ коэффициент $\gamma$ близок к единице, а при $\lambda$=0 он равен

$$\gamma = \frac{1}{\left|1 - z^2\right|}.)$$

Рассмотрим разность числителя и знаменателя подкоренного выражения для коэффициента виброизоляции при некотором конечном значении $\lambda$:

$$\Delta = 1 + 4\lambda^2 z^2 - [(1 - z^2)^2 + 4\lambda^2 z^2] = z^2(2 - z^2).$$

Эта разность, оказывается, не зависит от $\lambda$. При $z = 0$ и $z = \sqrt{2}$ она равна нулю, т.е. числитель и знаменатель одинаковы и, следовательно, $\gamma$ =1. При $z < \sqrt{2}$ $\Delta > 0$. Это означает, что числитель больше знаменателя, и поэтому $\gamma > 1$. Если же $z > \sqrt{2}$, то $\Delta < 0$ – числитель меньше знаменателя и $\gamma < 1$.

Как уже отмечалось, виброзащитная система является эффективной в том случае, когда коэффициент виброизоляции меньше единицы, поскольку при этом амплитуда силы, действующей на объект защиты, меньше амплитуды силы возмущающей. Проведенный анализ свидетельствуют о том, что это условие выполняется при $z > \sqrt{2}$, или при $p > \sqrt{2}k$. Имея в виду определение собственной частоты системы, условие эффективности виброзащиты можно представить в виде

$$p > \sqrt{\frac{2c}{m}}.$$

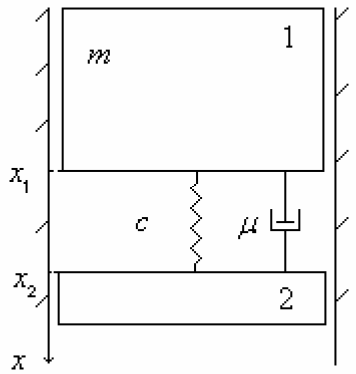
Частота возмущающей силы, вообще говоря, может быть какой угодно, и повлиять на нее для улучшения последнего неравенства практически невозможно. Но параметры системы поддаются регулировке, так что, подбирая соответствующие значения жесткости и массы, всегда можно обеспечить выполнение указанного условия и, следовательно, сделать защиту от колебаний эффективной.

- **Линейный виброизолятор при кинематическом возбуждении**

Рассмотрим случай, когда основание 2 движется по заданному закону, а виброизолятор выбирается так же.

Будем считать, что закон этого движения имеет вид

$$x_2 = H\sin pt\,.$$




Объектом защиты теперь будем считать машину 1. Выбрав начало координат в положении статического равновесия, запишем уравнение движения машины

$$m\ddot{x}_1 = -c(x_1 - x_2) - \mu(\dot{x}_1 - \dot{x}_2)\,,$$

поскольку сила сопротивления зависит от относительной скорости. Перепишем это уравнение в стандартной форме с учетом того, что

$$\dot{x}_2 = Hp\cos pt\,,$$

и поэтому

$$\ddot{x}_1 + 2b\dot{x}_1 + k^2 x_1 = H(k^2\sin pt + 2bp\cos pt)\,,$$

где, как обычно, $2b = \mu/m,\ \ k^2 = c/m$. По указанным ранее причинам, свободные колебания интереса не представляют, а частное решение этого уравнения будем искать в виде

$$x_1 = A\sin(pt + \delta)\,.$$

Тогда

$$\dot{x}_1 = Ap\cos(pt + \delta)\,, \tag{4.2.6}$$

$$\ddot{x}_1 = -Ap^2\sin(pt + \delta)\,, \tag{4.2.7}$$

в результате чего уравнение (4.2.4) принимает вид

$$-Ap^2\sin(pt+\delta) + 2bAp\cos(pt+\delta) + Ak^2\sin(pt+\delta) =$$
$$= H(k^2\sin pt + 2bp\cos pt)\,,$$

или

$$A(k^2 - p^2)(\sin pt\cos\delta + \cos pt\sin\delta) + 2bAp(\cos pt\cos\delta - \sin pt\sin\delta) =$$
$$= H(k^2\sin pt + 2bp\cos pt)\,.$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых тригонометрических функциях, получим систему уравнений

$$A(k^2 - p^2)\cos\delta - 2bpA\sin\delta = Hk^2\,,$$
$$A(k^2 - p^2)\sin\delta + 2bAp\cos\delta = 2Hbp\,,$$

из которой после возведения обеих частей в квадрат и почленного сложения следует

$$A = H\frac{\sqrt{k^4 + 4(bp)^2}}{\sqrt{(k^2 - p^2)^2 + 4(bp)^2}}\,.$$

Определив коэффициент виброизоляции как отношение амплитуды колебаний объекта защиты к амплитуде колебаний основания, получим

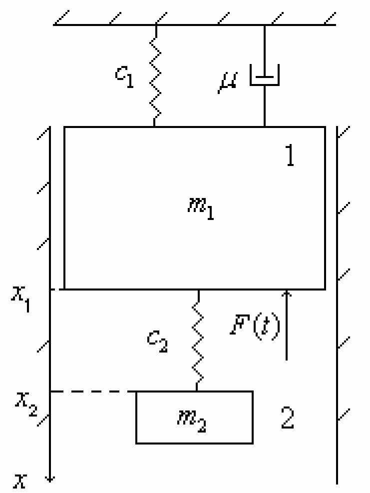
$$\gamma = \frac{A}{H} = \frac{\sqrt{k^4 + 4(bp)^2}}{\sqrt{(k^2 - p^2)^2 + 4(bp)^2}}\,,$$

т.е. в данном случае коэффициент виброизоляции имеет точно такой же вид, как и при силовом возбуждении, рассмотренном выше.

Из изложенного следует, что система виброизоляции эффективна только в том случае, когда собственная частота системы мала по сравнению с частотой возмущения. Для обеспечения низкой собственной частоты изолируемого объекта можно увеличить его массу, либо уменьшить жесткость упругого элемента изолятора.

### *4.3 Динамическое гашение колебаний*

Наряду с виброизоляцией используются также различные способы гашения колебаний. Идея динамического гашения колебаний состоит в присоединении к объекту виброзащиты дополнительных устройств, которые изменяют его вибрационное состояние. Изменение вибрационного состояния объекта может осуществляться как путем перераспределения энергии от объекта к гасителю, так и в направлении увеличения рассеяния энергии колебаний. Первый случай относится к так называемым инерционным динамическим гасителям, которые применяются для подавления моногармонических или узкополосных колебаний. При действии вибрационных нагрузок более широкого частотного диапазона предпочтительней оказывается иной способ, основанный на повышении диссипативных свойств системы. Динамические гасители такого типа называются поглотителями колебаний.




Рассмотрим систему, представленную на рисунке.

Объектом виброзащиты в данном случае является тело 1, связанное с неподвижным корпусом виброизолятором жесткости $c_1$ и демпфером μ; будем считать, что силы вязкого сопротивления пропорциональными скорости. На него также действует переменная сила $F(t) = H\sin pt$. Присоединим к телу 1 с помощью пружины жесткостью $c_2$ дополнительный груз 2. Такая система имеет две степени свободы. В качестве обобщенных координат выберем $x_1$ и $x_2$, определяющих положения грузов относительно их положений статического равновесия.

Тогда поведение системы будет описываться двуми уравнениями Лагранжа

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_1}\right) - \frac{\partial T}{\partial x_1} = -\frac{\partial U}{\partial x_1} + Q_1,$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_2}\right) - \frac{\partial T}{\partial x_2} = -\frac{\partial U}{\partial x_2} + Q_2,$$

где $Q_1$, $Q_2$ - непотенциальные части обобщенных сил.

Потенциальная энергия при указанном выборе обобщенных координат будет иметь вид

$$U = -P_1x_1 - P_2x_2 + \frac{1}{2}c_1\left[(x_1+\lambda_1)^2 - \lambda_1^2\right] + \frac{1}{2}c_2\left[(x_2 - x_1 + \lambda_2)^2 - \lambda_2^2\right],$$

где $\lambda_1$ и $\lambda_2$ - статические удлинения пружин под действием сил тяжести $\vec{P}_1$ и $\vec{P}_2$ соответственно. Тогда

$$-\frac{\partial U}{\partial x_1} = P_1 - c_1(x_1 + \lambda_1) + c_2(x_2 - x_1 + \lambda_2),$$

$$-\frac{\partial U}{\partial x_2} = P_2 - c_2(x_2 - x_1 + \lambda_2).$$

В положении статического равновесия , т.е. при $x_1 = 0$ и $x_2 = 0$, обобщенные силы обращаются в нуль, поэтому

$$P_1 - c_1\lambda_1 + c_2\lambda_2 = 0,$$

$$P_2 - c_2\lambda_2 = 0,$$

в результате чего выражения (4.3.4) ,( 4.3.5) упрощаются:

$$-\frac{\partial U}{\partial x_1} = -c_1x_1 + c_2(x_2 - x_1) = -(c_1 + c_2)x_1 + c_2x_2,$$

$$-\frac{\partial U}{\partial x_2} = -c_2(x_2 - x_1).$$

Поскольку непотенциальные силы действуют только на груз 1, движущийся поступательно, то

$$Q_1 = F(t) - \mu\dot{x}_1, \quad Q_2 = 0.$$

Кинетическая энергия системы в данном случае имеет простую форму

$$T = \frac{m_1\dot{x}_1^2}{2} + \frac{m_2\dot{x}_2^2}{2},$$

поэтому уравнения движения с учетом сказанного выше примут вид

$$m_1\ddot{x}_1 = -(c_1 + c_2)x_1 + c_2x_2 - \mu\dot{x}_1 + H\sin pt,$$

$$m_2\ddot{x}_2 = -c_2(x_2 - x_1).$$

Из-за наличия сил сопротивления свободные колебания в системе быстро затухнут, так что интерес представляют только вынужденные колебания, определяемые частным решением этих уравнений. Будем искать его в виде

$$x_1 = A_1\sin pt + B_1\cos pt,$$

$$x_2 = A_2\sin pt + B_2\cos pt.$$

Вычислим производные от приведенных выражений

$$\dot{x}_1 = A_1p\cos pt - B_1p\sin pt,$$

$$\dot{x}_2 = A_2p\cos pt - B_2p\sin pt,$$

$$\ddot{x}_1 = -A_1p^2\sin pt - B_1p^2\cos pt,$$

$$\ddot{x}_2 = -A_2p^2\sin pt - B_2p^2\cos pt$$

подставим их в уравнения движения

$$-m_1p^2(A_1\sin pt + B_1\cos pt) = -(c_1 + c_2)(A_1\sin pt + B_1\cos pt) +$$

$$+c_2(A_2\sin pt+B_2\cos pt)-\mu p(A_1\cos pt-B_1\sin pt)+H\sin pt,$$
$$-m_2p^2(A_2\sin pt+B_2\cos pt)=-c_2\left[(A_2-A_1)\sin pt+(B_2-B_1)\cos pt\right]$$
и приравняем в обеих частях полученных равенств коэффициенты при одинаковых тригонометрических функциях (все слагаемые, содержащие неизвестные величины, перенесем в левую часть):

$$(c_1+c_2-m_1p^2)A_1-c_2A_2-\mu pB_1=H,$$
$$\mu pA_1+(c_1+c_2-m_1p^2)B_1-c_2B_2=0,$$
$$-c_2A_1+(c_2-m_2p^2)A_2=0,$$
$$-c_2B_1+(c_2-m_2p^2)B_2=0.$$

Из последней системы уравнений следует

$$A_1=\frac{c_2-m_2p^2}{c_2}A_2,$$
$$B_1=\frac{c_2-m_2p^2}{c_2}B_2.$$

Для сокращения записи введем обозначения

$$\alpha=\frac{c_2-m_2p^2}{c_2},\quad \beta=c_1+c_2-m_1p^2.$$

С учетом введенных обозначений

$$(\beta\alpha-c_2)A_2-\mu p\alpha B_2=H,$$
$$\mu p\alpha A_2+(\beta\alpha-c_2)B_2=0.$$

Откуда следует

$$A_2=-\frac{\beta\alpha-c_2}{\mu p\alpha}B_2,$$

что после первое уравнение дает

$$-\frac{(\beta\alpha-c_2)^2}{\mu p\alpha}B_2-\mu p\alpha B_2=H$$

и поэтому

$$B_2=-\frac{\mu p\alpha H}{(\beta\alpha-c_2)^2+(\mu p\alpha)^2}.$$

Следовательно

$$A_2=\frac{\beta\alpha-c_2}{(\beta\alpha-c_2)^2+(\mu p\alpha)^2}H,\quad A_1=\frac{\alpha(\beta\alpha-c_2)}{(\beta\alpha-c_2)^2+(\mu p\alpha)^2}H,$$
$$B_1=-\frac{\mu p\alpha^2}{(\beta\alpha-c_2)^2+(\mu p\alpha)^2}H.$$

Таким образом, определены все коэффициенты, относящиеся к вынужденным колебаниям тел 1 и 2. При этом оказывается, что коэффициенты, определяющие движение защищаемого объекта, пропорциональны параметру $\alpha = c_2 - m_2 p^2$. Если подобрать такие значения $c_2$ и $m_2$, что $\alpha = 0$, то $A_1$ и $B_1$ обратятся в нули, и, стало быть, объект защиты не будет совершать никаких колебаний, т.е. добавочный груз погасит колебания объекта и будет двигаться при этом по закону

$$x_2 = -\frac{H}{c_2}\sin pt .$$

Как следует из сказанного выше, виброгашение такого типа эффективно только для одной фиксированной частоты. При произвольном изменении возмущающей силы используются поглотители колебаний вязкого типа.