Учреждение образования
«Белорусский государственный технологический университет»

Конспект лекций по дисциплине
«Теоретическая механика»

Для студентов I и II курсов заочного факультета специальностей:
1-53 01 01 «Автоматизация технологических процессов и производств»
1-46 01 02 «Технология деревообрабатывающих производств»
1-36 06 01 «Полиграфическое оборудование и системы обработки информации»
1-46 01 01 «Лесоинженерное дело»
1-08 01 01 «Профессиональное обучение»

Лектор: доцент Грода Я.Г.

Минск, БГТУ
2013 г.

Лекция 1

Законы и основные понятия механики. Введение в статику

- **Введение**

Механика - наука о **механическом движении** и **взаимодействии** материальных тел.

Механическое движение – процесс изменения взаимного расположения материальных тел в пространстве.

Механическое взаимодействие – взаимодействие при котором тела изменяют характер своего движения либо происходит их деформация. **Сила** - мера взаимодействия тел либо частей одного и того же тела.

Основная задача механики. – определение положения и скорости тела в любой момент времени если они известны в некоторый начальный момент времени.

Историческая роль механики. Ее место в создании *научной картины мира*.

Разделы механики: **статика**, **кинематика**, **динамика**. Способы их изложения.

- **Понятие раздела "Статика" и основные определения**

Статика - общее учение о силах и условиях равновесия материальных тел, подверженных их действию. Задачи статики:

1. ***приведение заданной системы сил к простейшему виду;***
2. ***определение условий равновесия системы сил.***

Роль моделей в механики. Модель **материальной точки**. Модель **абсолютно твердого тела**. Связь этих моделей с реальным миром.

Сила как векторная величина (модуль, точка приложения, направление). Единицы измерения силы. Понятие линии действия силы.

Понятие **системы сил**. Виды систем сил: ***плоские, пространственные; сходящиеся, параллельные***.

Понятие свободного тела и **принцип освобождения от связей**.

Понятие **эквивалентных систем сил** (если одну системы сил заменить другой, а движение тела не изменится).

Понятие **уравновешенной системы сил** (под ее действием тело может находиться в покое).

Понятие **равнодействующей** системы сил (если система сил эквивалентна одной силе то эта сила называется р.) и **уравновеши-**

вающей силы (равна по модулю равнодействующей и направлена в противоположную сторону).

Внешние и **внутренние** силы.

- **Аксиомы статики**

1. ***Если на свободное тело действуют две силы, то оно находится в состоянии равновесия тогда и только тогда, когда $F_1=-F_2$. (модули сил равны и силы направлены в противоположные стороны)***
2. ***Действие системы сил на АТТ не изменится если к этой системе сил добавить или отнять уравновешенную систему сил.***

Следствия из аксиом.

1. *Сила приложенная к АТТ - скользящий вектор. (Данное следствии е может применяться только к АТТ, пример со стержнем (сжатие, растяжение, равновесие)).*

- **Связи и их реакции**

Свободным телом называется такое тело, которое может перемещаться в пространстве в произвольном направлении.

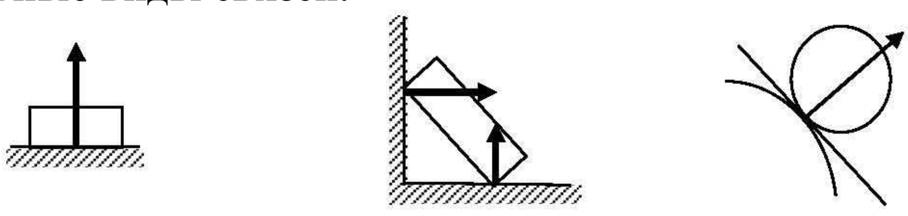
Связями называются ограничения любого вида наложенные на перемещения тела в пространстве.

Реакцией связи называется сила, с которой связь действует на данное тело.

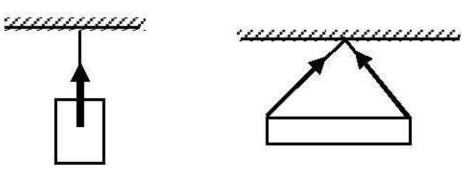
Реакция связи направлена вдоль того направления вдоль которого связь ограничивает возможность движения тела.

Принцип освобождения от связей: ***несвободное тело можно считать свободным, если все наложенные на него связи заменить их реакциями***.

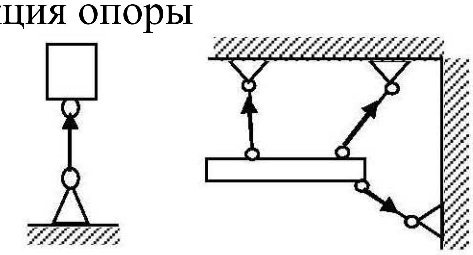
Основные виды связей.



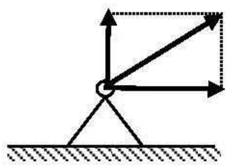
1. Нормальная реакция опоры



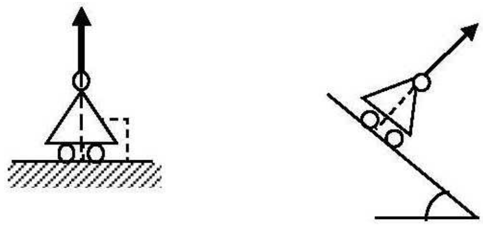
2. Натяжение нити



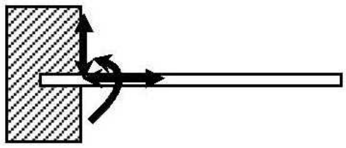
3. Реакция тонкого стержня



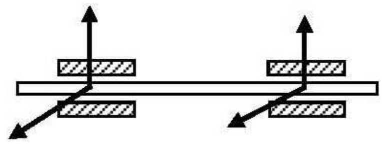
4. Реакция неподвижного шарнира



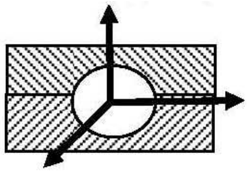
5. Реакция подвижного шарнира



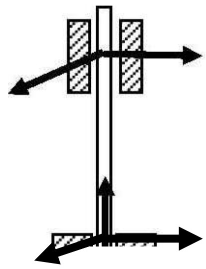
6. Реакции жесткой заделки балки



7. Реакции цилиндрического подшипника



8. Реакции сферического подшипника



9. Реакции подпятника

- **Равновесие системы сходящихся сил**

Если линии действия всех сил системы пересекаются в одной точке, то такая система сил называется **сходящейся**.

Главный вектор системы сил - векторная суммы всех сил системы. Различие понятий главного вектора и равнодействующей. Равнодействующая системы сходящихся сил (равна сумме сил и приложена в точке пересечения линий этих сил).

Условие равновесия сходящейся системы сил – главный вектор (равнодействующая) равен нулю.

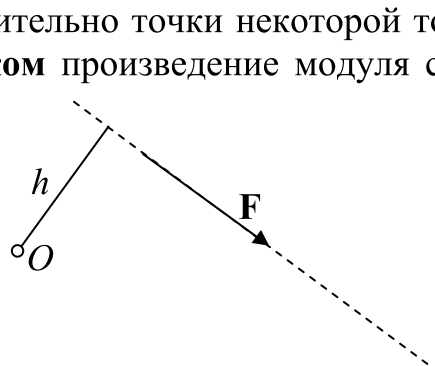
- ✓ Геометрическая интерпретация условия равновесия: силовой многоугольник замкнут.
- ✓ Аналитическая: сумма проекций на каждую ось 0.

Теорема о трех силах – если на твердое тело действуют 3 силы и тело в равновесии, то силы сходящиеся.

- **Алгебраический момент силы относительно точки**

Алгебраическим моментом силы **F** относительно точки некоторой точки *O* называется взятое **с соответствующим знаком** произведение модуля силы на ее **плечо**.

$M_O(\mathbf{F}) = \pm Fh$



Плечо силы – длина перпендикуляра (кратчайшее расстояние) опущенного из точки O на **линию действия** силы.

Правило выбора знаков: если под действием силы **F** механическая система стремится повернуться относительно точки O против часовой стрелки, то момент считается положительным, если по часовой - отрицательным.

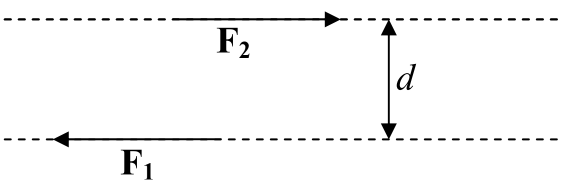
Единицей измерения момента является 1 ньютон-на-метр.

Момент силы относительно некоторой точки **равен 0** если эта **точка лежит на линии действия силы**.

Теорема Вариньона. Момент равнодействующей равен сумме моментов составляющих (момент суммы сил равен сумме моментов этих сил).

• Пара сил. Момент пары

Парой сил называется система двух равных по величине сил действующих вдоль параллельных прямых в противоположные стороны.



Плоскость, проходящая через линии действия сил образующих пару, называется **плоскостью пары**. **Плечом пары** d называется расстояние между линиями действия сил пары. **Алгебраический момент пары** равен взятому с соответствующим знаком произведению модуля силы входящей в пару на плечо пары, при этом правило выбора знаков совпадает с аналогичным правилом для момента силы относительно точки.

Теорема. Момент пары равен сумме моментов сил пары относительно любого центра.

Следствия теоремы: пары имеющие одинаковые моменты являются **эквивалентными**.

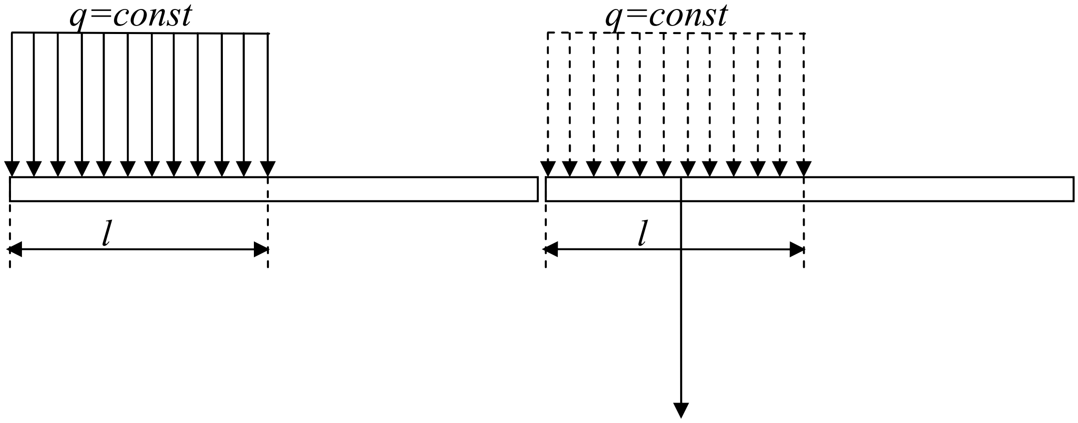
• Распределенная нагрузка

Нагрузка приложенная к некоторому **участку** механической системы называется **распределенной нагрузкой**.

Плоская система распределенных сил характеризуется ее и**нтенсивностью** q, т.е. значением силы приходящейся на единицу длины нагруженного участка ([q]=Н/м).

При решении задач статики распределенная нагрузка может быть заменена ее равнодействующей. Рассмотрим определение последней на примере **равномерно** и **линейно распределенной нагрузки**

1. Равномерно распределенная нагрузка

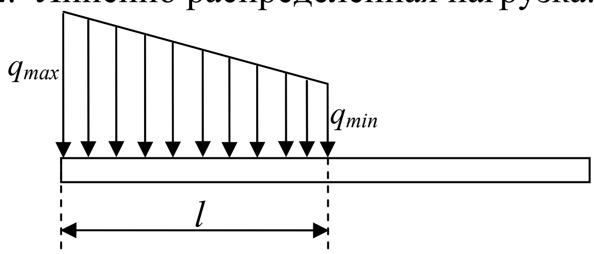


$$Q=\int_0^l q(x)dx=q\int_0^l dx=ql \qquad\qquad \boldsymbol{Q}$$

$$m(Q)=\int_0^l q(x)xdx=q\int_0^l xdx=\frac{ql^2}{2}=Q\frac{l}{2}$$

Т.о. можно считать, что равнодействующая равномерно распределенной нагрузки приложена в середине участка распределения.

2. Линейно распределенная нагрузка.



$$q(x)=q_{\max}-\frac{q_{\max}-q_{\min}}{l}x$$

$$Q=\int_0^l q(x)dx=\int_0^l\left(q_{\max}-\frac{\Delta q}{l}x\right)dx=q_{\max}l-\frac{\Delta q}{2}l=\frac{q_{\max}+q_{\min}}{2}l$$

$$m(Q)=\int_0^l q(x)xdx=\int_0^l\left(q_{\max}-\frac{\Delta q}{l}x\right)xdx=\frac{q_{\max}}{2}l^2-\frac{\Delta q}{3}l^2=Q\frac{l}{3}+\frac{q_{\min}}{6}l^2$$

Если $q_{\min}$=0 получаем

$$Q=\frac{q_{\max}}{2}l,\ m(Q)=Q\frac{l}{3}$$

Т.о. если нагрузка распределена "по треугольнику" то равнодействующая приложена на расстоянии ⅓l от точки приложения максимальной нагрузки.

- ## Условие равновесия произвольной плоской системы сил

Поскольку произвольная плоская система сил приводится к главному вектору и главному моменту, то очевидно, что для равновесия механической системы необходимо потребовать обращение в ноль двух этих величин.

В координатной форме условия равновесия принимает следующий вид

$$\sum_i F_{ix}=0,\quad \sum_i F_{iy}=0,\quad \sum_i M_O(\mathbf{F}_i)=0$$

Данная форма условий равновесия является основной. Помимо этой формы условия равновесия могут быть записаны в следующей форме

- ✓ $\sum_i F_{ix}=0,\quad \sum_i M_A(\mathbf{F}_i)=0,\quad \sum_i M_B(\mathbf{F}_i)=0$

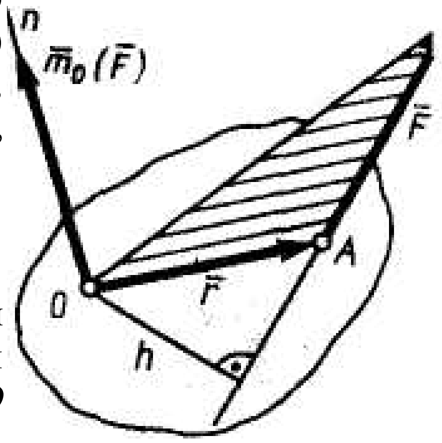
  прямая *AB* не перпендикулярна оси *x*
- ✓ $\sum_i M_A(\mathbf{F}_i)=0,\quad \sum_i M_B(\mathbf{F}_i)=0,\quad \sum_i M_C(\mathbf{F}_i)=0$

  точки *A, B* и *C* не лежат на одной прямой

- ## Случай плоской системы параллельных сил.

- ✓ $\sum_i F_{ix} = 0, \quad \sum_i M_0(\mathbf{F}_i) = 0$ **ось *x* параллельна силам**
- ✓ $\sum_i M_A(\mathbf{F}_i) = 0, \quad \sum_i M_B(\mathbf{F}_i) = 0$ **прямая *AB* не параллельна силам**

• Вектор-момент силы относительно точки и вектор-момент пары сил.



Вектор – моментом силы **F** относительно центра *O* называется векторная величина $\mathbf{m}_O(\mathbf{F})$ равная векторному произведению радиус-вектора **r**, проведенного из центра *O* в точку приложения силы, на саму силу.

$$\mathbf{m}_O(\mathbf{F}) = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$$

Отметим следующие свойства момента силы: 1) момент силы относительно центра не изменяется при переносе точки приложения силы вдоль ее линии действия; 2) момент силы относительно центра *O* равен нулю или когда сила равна нулю, или когда линия действия силы проходит через центр *O* (плечо равно нулю).

Нетрудно видеть, что модуль вектор–момента силы относительно точки с точностью до знака совпадает с алгебраическим моментом силы относительно той же точки. Причины использования алгебраического момента для плоских задач.

Теорема Вариньона для вектор–момента оказывается очевидно справедливой и вытекает напрямую из определения понятия вектор – момента и свойств операции векторного произведения.

Аналогичным образом может быть определено понятие вектор–момента пары сил называется как вектора т, модуль которого равен произведению модуля одной из сил пары на ее плечо и который направлен перпендикулярно плоскости действия пары в ту сторону, откуда пара видна стремящейся повернуть тело против хода часовой стрелки. Снова можно отметить, что модуль и этого вектор–момента с точностью до знака совпадает с алгебраическим моментом.

• Момент силы относительно оси.

Проекция вектора $\mathbf{m}_O(\mathbf{F})$, т. е. момента силы **F** относительно центра *O*, на какую-нибудь ось *z*, проходящую через этот центр, называется **момментом силы F относительно оси** *z*, т.е.

$$m_z(\mathbf{F}) = m_O(\mathbf{F})\cos\gamma$$

где $m_z(\mathbf{F})$ — момент силы **F** относительно оси *z*; γ — угол между вектором $\mathbf{m}_O(\mathbf{F})$ и осью *z*.

Из определения следует, что $m_z(\mathbf{F})$, как проекция вектора на ось, является величиной алгебраической, т.е. имеет знак. При этом момент силы относительно оси будет иметь знак плюс, когда с положительного конца оси поворот, который стремится совершить сила **F**, виден происходящим против хода часовой стрелки, и знак минус — когда по ходу часовой стрелки.

Момент силы относительно оси может быть определен также следующим образом: момент силы $\boldsymbol{F}$ относительно оси z равен алгебраическому моменту проекции этой силы на плоскость, перпендикулярную оси z, взятому относительно точки O_1 пересечения оси с этой плоскостью.

Второе определение фактически дает метод вычисления момента силы относительно оси. Также можно отметить, что **момент силы относительно оси равен нулю** если

1. сила параллельна оси
2. линия действия силы пересекает ось.

Оба варианта могут быть соединены в один: **сила и ось лежат в одной плоскости**.

Теорема Вариньона о моменте равнодействующей справедлива и для моментов относительно любой оси. Теоремой особенно удобно пользоваться для нахождения моментов силы относительно координатных осей, разлагая силу на составляющие, параллельные осям или их пересекающие.

• Условие равновесия произвольной системы сил

Покажем, что для равновесия любой системы сил необходимо и достаточно, чтобы главный вектор этой системы сил и ее главный момент относительно любого центра были равны нулю, т. е. чтобы выполнялись условия

$$\mathbf{R} = 0, \quad \mathbf{M}_O = 0$$

где O — любой центр.

Сформулированные выше условия являются необходимыми, так как если какое-нибудь из них не выполняется, то система действующих на тело сил приводится или к равнодействующей (когда $\mathbf{R}\neq 0$), или к паре сил (когда $\mathbf{M}_O\neq 0$) и, следовательно, не является уравновешенной. Одновременно эти условия являются и достаточными, потому что при $\mathbf{R}=0$ система сил может приводиться только к паре с моментом $\mathbf{M}_O$, а так как $\mathbf{M}_O=0$, то имеет место равновесие.

Лекция 2
Кинематика точки и простейших движений твердого тела

• Кинематика - геометрия движения

Кинематика – раздел механики в котором изучается движение без учета причин это движение вызвавших. Место кинематики среди иных разделов механики.

Понятие ***системы отсчета***. Система отсчета = тело отсчета + система координат + время.

Пространство и время кинематики. Абсолютность времени и однородность пространства. Границы применимости классической механики.

Основная задача кинематики: зная закон движения установить методы определения кинематических характеристик этого движения.

Закон движения – зависимость, определяющая положение тела в пространстве в любой момент времени.

Траектория – линия вдоль которой движется точка в пространстве. Различие между траекторией и законом движения.

• Способы задания движения точки

1. *Векторный способ задания*. Положение точки задается радиус-вектором r. Его годограф определяет траекторию движения. Следует понимать, что от времени зависят координаты радиус-вектора. Такой способ описания хорош при выводе общих соотношений кинематики.
2. *Координатный способ задания*. Задан закон изменения со временем каждой из координат. Например $x=f_1(t)$, $y=f_2(t)$, $z=f_3(t)$. Вместо декартовой системы координат может использоваться любая другая.

Связь между векторным и координатным способами задания движения определяется соотношением

$$\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}$$

3. *Естественный способ задания*. Необходимо знать траекторию, на которой выбрать точку и определить положительное и отрицательное удаление от нее измеряемое вдоль траектории. Это удаление и есть естественная координата s. Закон движения имеет форму $s=f(t)$.

• Вектор скорости точки

Понятие средней скорости как отношения вектора перемещения ко времени за которое оно произошло.

Предельный переход от средней скорости к мгновенной.

$$\boldsymbol{\upsilon}(t) = \frac{d\mathbf{r}(t)}{dt}$$

Направление вектора скорости: касательная есть предельное представление секущей, являющейся вектором перемещения. Подчеркнуть однозначность взаимного положения траектории и вектора скорости.

• Вектор ускорения точки

Понятие ускорения точки, как скорости изменения скорости.

Понятие среднего ускорения и предельный переход к мгновенному ускорению.

$$\mathbf{a}(t)=\frac{d\boldsymbol{\upsilon}(t)}{dt}=\frac{d^2\mathbf{r}(t)}{dt^2}$$

Две причины наличия ускорения при движении точки: изменение величины скорости и изменение ее направления.

Подчеркнуть невозможность столь однозначного определения направления вектора ускорения по сравнению с вектором скорости.

• Скорость и ускорение точки при координатном способе задания движения

Как известно, $\mathbf{r}(t)=x(t)\mathbf{i}+y(t)\mathbf{j}+z(t)\mathbf{k}$, причем единичные орты являются векторами постояными. Поэтому для вектора скорости получаем

$$\boldsymbol{\upsilon}(t)=\dot{x}(t)\mathbf{i}+\dot{y}(t)\mathbf{j}+\dot{z}(t)\mathbf{k}$$

С другой стороны для вектора скорости, как и для любого вектора можем записать

$$\boldsymbol{\upsilon}(t)=\upsilon_x(t)\mathbf{i}+\upsilon_y(t)\mathbf{j}+\upsilon_z(t)\mathbf{k}\,.$$

Сопоставив соотношения получаем

$$\upsilon_x(t)=\dot{x}(t),\quad \upsilon_y(t)=\dot{y}(t),\quad \upsilon_z(t)=\dot{z}(t)$$

Модуль скорости и направляющее косинусы определяются как

$$\upsilon=\sqrt{\upsilon_x^2+\upsilon_y^2+\upsilon_z^2},\quad \cos\alpha=\frac{\upsilon_x}{\upsilon},\quad \cos\beta=\frac{\upsilon_y}{\upsilon},\quad \cos\gamma=\frac{\upsilon_z}{\upsilon}$$

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$$

Полностью аналогичные рассуждения могут быть проделаны и для вектора ускорения

$$a_x(t)=\ddot{x}(t),\quad a_y(t)=\ddot{y}(t),\quad a_z(t)=\ddot{z}(t)$$

$$a=\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2},\quad \cos\alpha=\frac{a_x}{a},\quad \cos\beta=\frac{a_y}{a},\quad \cos\gamma=\frac{a_z}{a}$$

• Оси естественного трехгранника

При описании движения точки естественным образом значения векторов ***a*** и $\boldsymbol{\upsilon}$ определяются проекциями не на оси системы отсчета *Oxyz*, а на подвижные оси $M\tau nb$ связанные с самой точкой *M* и движущиеся вместе с нею. Эта тройка осей называется ***естественным трехгранником*** и строится следующим образом

1. Ось $M\tau$ направлена по касательной к траектории в сторону положительного отсчета криволинейной координаты *s*.
2. Ось *Mn* – по главной нормаль к траектории в сторону вогнутости траектории (главная нормаль – прямая перпендикулярная к касательной и лежащая в соприкасающейся плоскости).

3. Ось *Mb* называется бинормалью и может быть определенная вектором $\mathbf{b} = \boldsymbol{\tau} \times \mathbf{n}$, где $\boldsymbol{\tau}$ и $\mathbf{n}$ – единичные вектора орты на осях $M\tau$ и *Mn*.

Нетрудно видеть, что построенная таким образом система координат является прямоугольной декартовой, однако в отличии от неподвижных осей *Oxyz* эта система отсчета движется вместе с точкой при ее движении вдоль траектории.

Рассмотри проекции векторов скорости и ускорения на оси естественного трехгранника.

Ранее было установлено, что скорость точки направлена по касательной к траектории. Это позволяет утверждать что

$$\upsilon_n = \upsilon_b = 0, \quad \upsilon_\tau = \pm\upsilon,$$

Следовательно υ_τ или совпадает с модулем скорости или отличается от него только знаком. В дальнийшем условимся обозначать υ_τ опуская индекс τ как υ и назовем его ***алгебраическим значением скорости***.

Определим алгебраическое значение скорости. За время Δt точка пройдем по траектории путь Δs. Тогда средняя скорость движения точки

$$\upsilon_{\tilde{n}\eth} = \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

Соответственно мгновенная скорость есть предел средней при $\Delta t \to 0$

$$\upsilon = \lim_{\Delta t \to 0} \upsilon_{\tilde{n}\eth} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{ds}{dt} = \dot{s}$$

Т.о. ***алгебраическое значение скорости точки в данный момент времени равно первой производной от криволинейной координаты этой точки по времени.***

• Касательное и нормальное ускорения точки

Ранее было установлено, что вектор ускорения лежит в соприкасающейся плоскости. Это позволяет утверждать, что в любой момент времени $a_b = 0$. Определим две оставшиеся проекции a_n и a_τ - нормальное и тангенциальное (касательное) ускорения .

$$a_\tau = \frac{(d\boldsymbol{\upsilon})_\tau}{dt}, \quad a_n = \frac{(d\boldsymbol{\upsilon})_n}{dt}$$

Проведя соответствующие вычисления получим

$$a_\tau = \frac{d\upsilon}{dt}, \quad a_n = \frac{\upsilon^2}{\rho}$$

где ρ – ***радиус кривизны траектории*** в точке *M*.

Радиус кривизны кривой в некоторой точке это радиус окружности дуга которой совпадает с кривой в окрестности данной точки.

Т.о. окончательно для нормального и тангенциального ускорений получаем следующие соотношения

Полное ускорение определяется геометрической суммой векторов $\boldsymbol{a}_\tau$ и $\boldsymbol{a}_n$. Поскольку оси $M\tau$ и Mn ортогональны для модуля полного ускорения можно записать следующее выражение

$$a = \sqrt{(a_\tau)^2 + (a_n)^2}\ .$$

Для выяснения механической природы нормальной и тангенциальной компонент вектора ускорения рассмотрим прямолинейное движение и равномерное криволинейное движение.

При прямолинейном движении направление скорости не изменяется и отличное от нуля ускорение может быть обеспечено только изменением модуля скорости. В то же время движение по прямой можно считать движением по дуге окружности бесконечно большого радиуса, а значит $\rho \to \infty$, $a_n = 0$ и $a = a_\tau$. Это позволяет сделать вывод, что т***ангенциальное (касательное) ускорение характеризует изменение скорости по величине.***

При равномерном движении $\upsilon = const$, $a_\tau = 0$ и $a = a_n$. Ускорение в этом случае появляется только за счет изменения скорости по направлению. Значит, ***нормальное ускорение характеризует изменение скорости по направлению.***

• Задачи кинематики твердого тела. Виды его движения

Абсолютно твердым телом (в дальнейшем, ***твердым телом***) называется такая механическая система при движение которой расстояние между любыми двумя точками в процессе движения остается постоянным. совокупность Пусть кривая AB – траектория движения точки M при ее движении в пространстве.

Задачи кинематики твердого тела

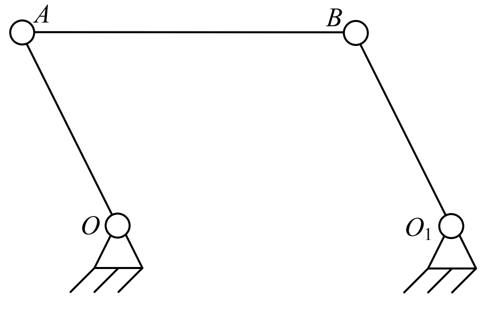
1. Задание движения и определение кинематических характеристик движения тела в целом;

2. Определение движения кинематических характеристик движения отдельных точек тела.

Поскольку движение твердого тела гораздо разнообразнее по сравнения с движением материальной точки изучение кинематики его движения мы начнем с рассмотрения двух простейших типов его движения (простейших движений) – ***поступательного движения*** и ***вращения твердого тела вокруг неподвижной оси***.

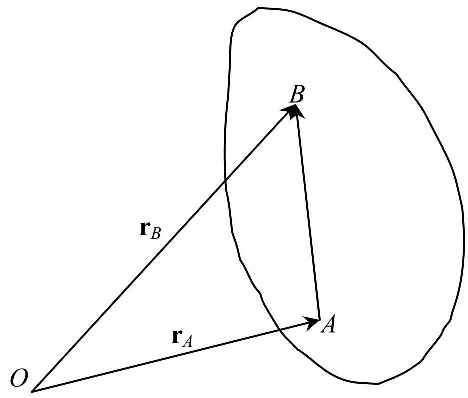
• Поступательное движение твердого тела.

Поступательным называется такое движение твердого тела при котором любая прямая проведенная в нем остается при движении параллельной своему начальному положению.



Поступательное движение следует отличать от *прямолинейного*! При поступательном движении траектории отдельных точек могут быть и кривыми линиями. Примером не прямолинейного, но поступательного движения может служить движение спарника.

Теорема о поступательном движении. При поступательном движении твердого тела все его точки описывают одинаковые траектории и имеют в каждый момент времени одинаковые (по модулю и направлению) скорости и ускорения.



Доказательство. Есть две точки твердого тела A и B, их положение задается радиус-векторами $\mathbf{r}_A$ и $\mathbf{r}_B$, соответственно. Тогда можно записать, что $\mathbf{r}_B=\mathbf{r}_A+\mathbf{AB}$. При этом при движении вектор **AB** остается постоянным поскольку его модуль не изменяется т.к. тело является абсолютно твердым, а направление постоянно т.к. движение является поступательным. Следовательно траектория точки B может быть получена из траектории точки A смещением на вектор **AB**.

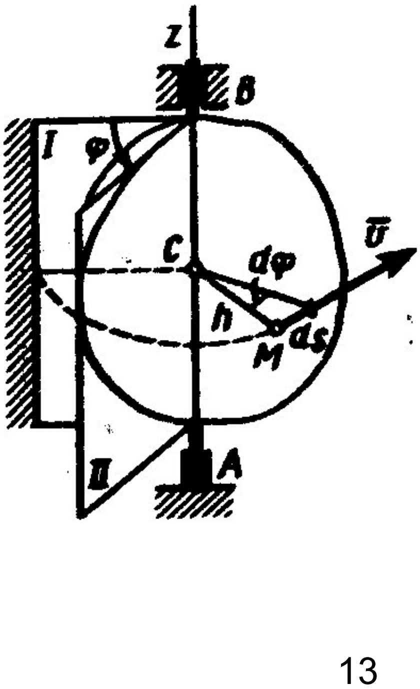
Для нахождения скорости продифференцируем это соотношение с учетом того, что $\mathbf{AB}=\mathbf{const}$, и получим $\boldsymbol{\upsilon}_A=\boldsymbol{\upsilon}_B$, аналогично этому вторая производная даст $\boldsymbol{a}_A=\boldsymbol{a}_B$. Т.к. точки были выбраны произвольно, то это справедливо для любой точки твердого тела.

Следствие теоремы: поступательное движение твердого тела определяется движением любой его точки, при этом вектора скорости и ускорения можно изображать приложенными так же в любой точке тела.

Понятие скорости и ускорения движения твердого имеет смысл ***только*** при поступательном движении. В любом другом случае можно говорить ***только*** о скорости и ускорении движения точки твердого тела.

• Вращательное движение ТТ вокруг неподвижной оси. Угловая скорость и угловое ускорение

Вращательным называется такое движение твердого тела при котором какие-нибудь две его точки (или неизменно с ним связанные) остаются неподвижными. Прямая, проходящая через две эти точки называется ***осью вращения***.



Для описания вращения твердого тела рассмотрим две полуплоскости. Одну неподвижную, а вторую жестко связанную с телом. При вращении тела угол между этими полуплоскостями φ, называемый углом поворота твердого тела, будет изменяться. Зависимость угла поворота от времени $\varphi=\varphi(t)$ позволяет определять положение твердого тела в произвольный момент времени и является ***законом вращательного движения твердого тела вокруг неподвижной оси***.

Угол повороты измеряется в радианах!

Основными кинематическими характеристиками вращательного движения являются угловая скорость ω и угловое ускорение ε. Модуль угловой скорости определяется первой производной от угла поворота φ

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} = \dot{\varphi},$$

а ее направление правилом правого винта. ***Угловая скорость всегда направлена по оси вращения.***

Смысл угловой скорости – на сколько радиан тело повернется за 1 секунду. Единицей ее измерения является рад/с.

Иногда угловая скорость задается в числе оборотов в минуту *n*. Пересчет в обычные единицы измерения осуществляется следующим образом

$$\omega = \frac{2\pi n}{60} = \frac{\pi n}{30}$$

Аналогичным образом может быть определено и угловое ускорение

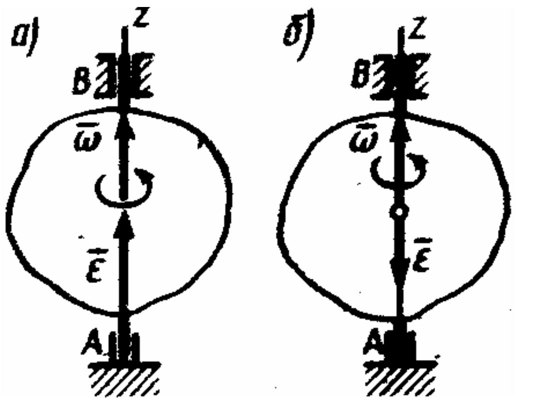
$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\omega}{dt^2} = \dot{\omega} = \ddot{\varphi}$$

Смысл углового ускорения – на сколько радиан в секунду изменится угловая скорость тела за 1 секунду. Единицей ее измерения является рад/с^2.

Как и угловая скорость, угловое ускорение направлено по оси вращения. При этом

$$\varepsilon = \frac{d\,\omega}{dt}$$

Т.е. направление угловой скорости и ускорения совпадают, если тело вращается ускорено, и вектора направлены в противоположные стороны, если тело замедляется.



- ## Скорости и ускорения точек вращающегося тела

Скорости точек. Рассмотрим точку твердого тела *M* на расстоянии *h* от оси вращения. Эта точка движется по окружности радиуса *h*. За время *dt* происходит элементарный поворот тела на угол *d*φ, а точка при этом совершает вдоль своей траектории элементарное перемещение *ds*=*hd*φ. Отсюда скорость точки

$$\upsilon = \frac{ds}{dt} = h\frac{d\varphi}{dt} = h\omega.$$

В отличии от угловой скорости эту скорость называют линейной или окружной скоростью точки *M*.

Ускорения точки. Для определения ускорения точки твердого тела при его вращательном движении воспользуемся определениями нормального и тангенциального ускорений, учтя, что в нашем случае радиус кривизны равен *h*.

$$a_n = \frac{\upsilon^2}{h} = \frac{(h\omega)^2}{h} = h\omega^2 \quad a_\tau = \frac{d\upsilon}{dt} = \frac{d(h\omega)}{dt} = h\frac{d\omega}{dt} = h\varepsilon$$

Полное ускорение точки в этом случае

$$a = \sqrt{a_n^2 + a_\tau^2} = h\sqrt{\omega^4 + \varepsilon^2}$$

Как и скорость ускорения точки называют линейными.

Линейные скорость и ускорения - кинематические характеристики движения точки твердого тела, а угловые скорость и ускорение - кинематические характеристики движения всего твердого тела.

Если учесть, что угловые скорость и ускорение это векторные величины, то для линейных скорости и ускорения могут быть записаны следующие выражения

$$\boldsymbol{\upsilon} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$$
$$\mathbf{a} = \boldsymbol{\varepsilon} \times \mathbf{r} + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\upsilon}$$

Лекция 3
Кинематика сложного движения точки. Теорема о сложении скоростей

• Относительное, переносное и абсолютные движения

Рассматривая кинематику точки и простейших движений твердого тела мы всегда использовали одну единственную систему отсчета. Однако в ряде случаев целесообразно, а иногда и необходимо рассматривать движение точки относительно двух систем отсчета, одна из которых считается условно неподвижной, а вторая движется по отношению к первой. В этом случае движение точки называется ***составным*** или ***сложным***.

Например человек перемещается по едущему автобусу. Это движение можно рассматривать как сочетание движения человека относительно условно неподвижного автобуса и движения самого автобуса. Т.е. мы можем разложить исходное движение на два более простых и более легко исследуемых движения. Именно возможность представления более сложного движения в виде суперпозиции более простых движений и представляет практическую ценность теории сложного движения.

Рассмотрим точку M которая движется относительно подвижной системы отсчета $O_1x_1y_1z_1$. В свою очередь движение последней рассмотрим относительно условно неподвижной системы $Oxyz$.

Движение точки по отношению к подвижной системе отсчета называется ***относительным движением***. Соответствующая ему траектория это ***относительная траектория***, скорость – ***относительная скорость*** $\boldsymbol{\upsilon}_r$, ускорение – ***относительное ускорение*** $\boldsymbol{a}_r$.

Движение самой подвижной системы отсчета (и всех неизменно связанных с нею точек) относительно неподвижной называется ***переносным движением***. Соответственно, можно говорить о ***переносной скорости*** $\boldsymbol{\upsilon}_\mathrm{e}$ и ***переносном ускорении*** $\boldsymbol{a}_e$ как скорости и ускорении точки подвижной системы совпадающей в данный момент времени с подвижной точкой M.

Движение точки относительно неподвижной системы отсчета называется а***бсолютным движением***, а траектория, скорость и ускорение в ней – ***абсолютная траектория***, ***абсолютная скорость*** $\boldsymbol{\upsilon}_\mathrm{a}$ и *абсолютное ускорение* $\boldsymbol{a}_a$.

В рассмотренном примере движение человека относительно автобуса это относительное движение с относительной скоростью и ускорением, движение самого автобуса это переносное движение (переносная скорость – скорость той точки пола автобуса в которой находится человек в данный момент времени), а движение человека относительно, например, газетного киоска на остановке – абсолютное движение.

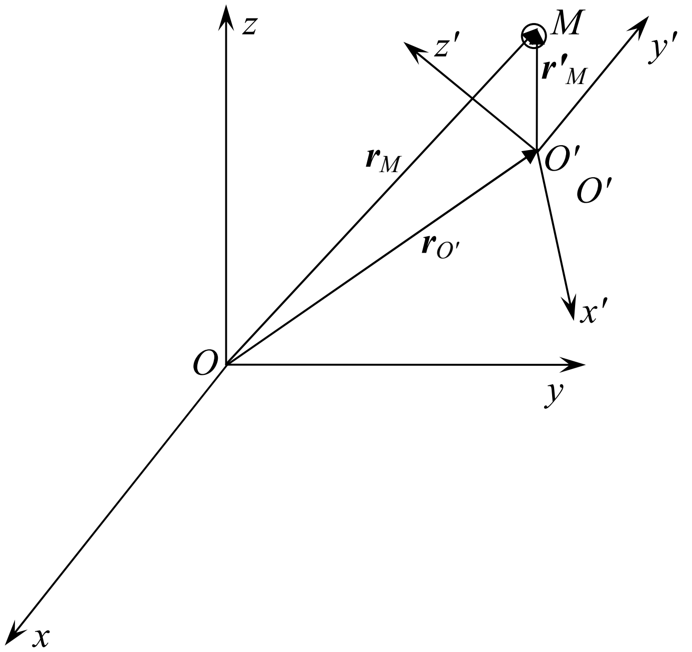
• Теорема о сложении скоростей.

Итак, рассмотрим сложное движение точки M

$$\mathbf{r}_M = \mathbf{r}_{O'} + \mathbf{r}'_M$$

либо

$$\mathbf{r}_M = \mathbf{r}_{O'} + x'\mathbf{i}' + y'\mathbf{j}' + z'\mathbf{k}'$$



Продифференцируем обе части данного соотношения по времени

$$\frac{d\mathbf{r}_M}{dt} = \frac{d\mathbf{r}_{O'}}{dt} + x'\frac{d\mathbf{i}'}{dt} + y'\frac{d\mathbf{j}'}{dt} + z'\frac{d\mathbf{k}'}{dt} + \frac{dx'}{dt}\mathbf{i}' + \frac{dy'}{dt}\mathbf{j}' + \frac{dz'}{dt}\mathbf{k}' \quad (1)$$

Про анализируем слагаемые последнего соотношения. $\mathbf{r}_{\text{M}}$ – описывает движение в неподвижной системе координат, а значит его производная это не что иное как абсолютная скорость.

$$\frac{d\mathbf{r}_M}{dt} = \boldsymbol{\upsilon}_a$$

Три последних слагаемых относятся к движению точки в подвижной системе отсчета, т.е. представляют собой относительную скорость

$$\frac{dx'}{dt}\mathbf{i}' + \frac{dy'}{dt}\mathbf{j}' + \frac{dz'}{dt}\mathbf{k}' = \boldsymbol{\upsilon}_r$$

Оставшиеся четыре слагаемых описывают изменения происходящие с самой подвижной системой отсчета.

Если точка *M* жестко связана с подвижной системой, то очевидно, что

$$\boldsymbol{\upsilon}_r = 0, \qquad (2)$$

а абсолютная скорость совпадает со скоростью самой подвижной системы

$$\boldsymbol{\upsilon}_a = \boldsymbol{\upsilon}_e \qquad (3)$$

Сопоставление соотношений (1) и (3) при учете (2) позволяет определить переносную скорость как

$$\boldsymbol{\upsilon}_e = \frac{d\mathbf{r}_{O'}}{dt} + x'\frac{d\mathbf{i}'}{dt} + y'\frac{d\mathbf{j}'}{dt} + z'\frac{d\mathbf{k}'}{dt}$$

Производная от радиус-вектора начала отсчета подвижной системы характеризует ее поступательное движение по отношению к неподвижной системе, а производные от единичных орт характеризуют вращение подвижной системы отсчета по отношению к неподвижной.

Таким образом, общее выражение для абсолютной скорости при сложном движении принимает следующий вид

$$\boldsymbol{\upsilon}_a = \boldsymbol{\upsilon}_e + \boldsymbol{\upsilon}_r$$

При сложном движении абсолютная скорость точки Равна геометрической сумме относительной и переносной скоростей.

$$\upsilon_a = \sqrt{\upsilon_e^2 + \upsilon_r^2 + 2\upsilon_e\upsilon_r \cos\alpha}$$

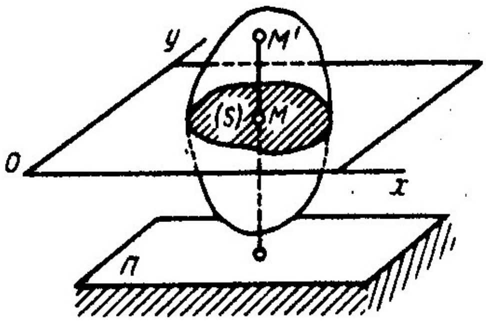
α – угол между векторами $\boldsymbol{\upsilon}_r$ и $\boldsymbol{\upsilon}_e$.

• Понятие плоскопараллельного движения

Плоскопараллельным (или плоским) называется такое движение твердого тела, при котором все его точки перемещаются параллельно некоторой фиксированной плоскости.

Плоское движение совершают многие части механизмов и машин, например катящееся колесо на прямолинейном участке пути, шатун в кривошипно-ползунном механизме и др. Частным случаем плоскопараллельного движения является вращательное движение твердого тела вокруг неподвижной оси.

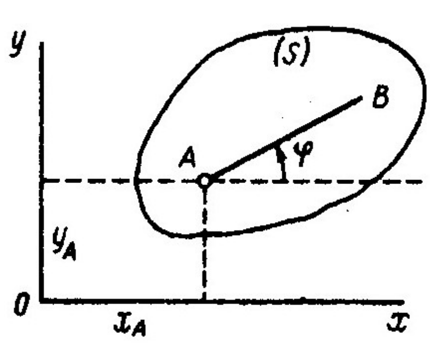
Рассмотрим сечение S тела какой-нибудь плоскостью Oxy, параллельной выделенной плоскости. При плоскопараллельном движении все точки тела, лежащие на прямой MM', перпендикулярной сечению S, движутся тождественно.



Отсюда заключаем, что для изучения движения всего тела достаточно изучить, как движется в плоскости Oxy сечение S этого тела или некоторая плоская фигура S. Поэтому в дальнейшем вместо плоского движения тела будем рассматривать движение плоской фигуры S в ее плоскости, т.е. в плоскости Oxy.

• Уравнения плоскопаралельного движения твердого тела

Положение фигуры S в плоскости Oxy определяется положением какого-нибудь проведенного на этой фигуре отрезка AB. В свою очередь положение отрезка AB можно определить, зная координаты x_A, y_A точки A и угол φ, который отрезок AB образует с осью x. Точку A ***выбранную для определения положения фигуры*** S, ***будем в*** дальнейшем ***называть полюсом***.



При движении фигуры величины x_A, y_A и φ будут изменяться. Чтобы знать закон движения, т. е. положение фигуры в плоскости Oxy в любой момент времени, надо знать зависимости

$$x_A = x_A(t), \quad y_A = y_A(t), \quad \varphi = \varphi(t).$$

Данные уравнения, определяющие закон происходящего движения, называются ***уравнениями движения плоской фигуры в ее плоскости***. Они же являются ***уравнениями плоскопараллельного движения твердого тела***.

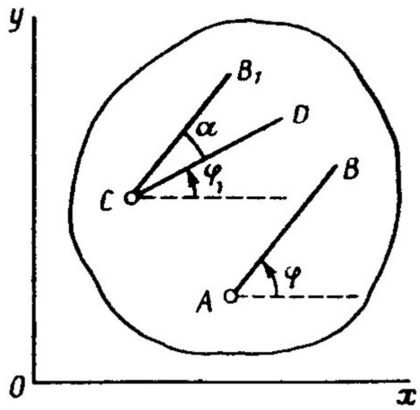
Первые два из уравнений плоского движения определяют то движение, которое фигура совершала бы при $\varphi=const$; это, очевидно, будет поступательное движение, при котором все точки фигуры движутся так же, как полюс A. Третье уравнение определяет движение, которое фигура совершала бы при $x_A=const$ и $y_A=const$, т. е. когда полюс A неподвижен; это будет вращение фигуры вокруг полюса A. Отсюда можно заключить, что ***в общем случае движение плоской фигуры в ее плоскости может рассматриваться как слагающееся из поступательного движения, при котором все точки фигуры движутся так же, как полюс А, и из вращательного движения вокруг этого полюса***.

Иными словами ***плоское движение можно считать состоящим из поступательного движения вместе с полюсом А и вращения вокруг оси перпендикулярной плоскости и проходящей через точку А***.

• Основные кинематические характеристики плоского движения и их зависимость от выбора полюса

Основными кинематическими характеристиками рассматриваемого движения являются – скорость и ускорение поступательного движения, равные скорости и ускорению полюса ($\boldsymbol{\upsilon}_{пост}=\boldsymbol{\upsilon}_A$, $\boldsymbol{a}_{пост}=\boldsymbol{a}_A$), а также угловая скорость со и угловое ускорение ее вращательного движения вокруг полюса. Значения этих характеристик в любой момент времени t можно найти, воспользовавшись уравнениями.

При изучении движения можно в качестве полюса выбирать любую точку фигуры. Рассмотрим, что получится, если вместо A выбрать в качестве полюса какую-нибудь другую точку C и определять положение фигуры отрезком CB_1, образующим с осью Ox угол φ_1.

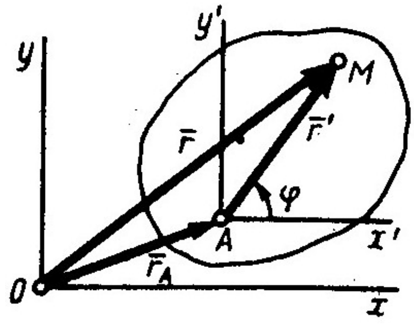


Характеристики поступательной части движения при этом изменятся, так как в общем случае $\boldsymbol{\upsilon}_C \neq \boldsymbol{\upsilon}_A$ и $\boldsymbol{a}_C \neq \boldsymbol{a}_A$ (иначе движение фигуры было бы поступательным). Характеристики же вращательной части движения, т. е. ω и ε, остаются неизменными. В самом деле, проведя из C прямую CB_1 параллельную AB, мы видим, что в любой момент времени угол $\varphi_1=\varphi-\alpha$, где $\alpha=const$. Отсюда $\dot{\varphi}_1 = \dot{\varphi}$, $\ddot{\varphi}_1 = \ddot{\varphi}$ или $\omega_1=\omega$, $\varepsilon_1=\varepsilon$.

Следовательно, ***вращательная часть движения от выбора полюса не зависит***.

• Определение скоростей точек плоской фигуры

Ранее было отмечено, что движение плоской фигуры можно рассматривать как слагающееся из поступательного движения, при котором все точки фигуры движутся со скоростью υ_A полюса A, и из вращательного движения вокруг этого полюса. Покажем, что скорость любой точки M фигуры складывается геометрически из скоростей, которые точка получает в каждом из этих движений.



Положение любой точки M фигуры определяется по отношению к осям Oxy радиусом-вектором $\mathbf{r}=\mathbf{r}_A+\mathbf{r}'$, где $\mathbf{r}_A$ – радиус-вектор полюса A, $\mathbf{r}'=\boldsymbol{AM}$ – вектор, определяющий положение точки M относительно осей $Ax'y'$, перемещающихся вместе с полюсом A поступательно (движение фигуры по отношению к этим осям представляет собой вращение вокруг полюса A). Тогда

$$\boldsymbol{\upsilon}_M = \frac{d\boldsymbol{r}}{dt} = \frac{d\boldsymbol{r}_A}{dt} + \frac{d\boldsymbol{r}'}{dt}$$

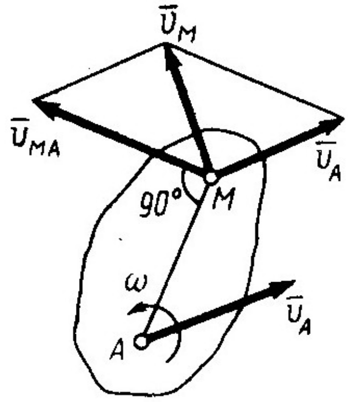
В полученном равенстве величина $d\boldsymbol{r}_A/dt=\boldsymbol{\upsilon}_A$ есть скорость полюса A; величина же $d\boldsymbol{r}'/dt$ равна скорости $\boldsymbol{\upsilon}_{MA}$, которую точка M получает при $\boldsymbol{r}_A=const$, т. е. относительно осей $Ax'y'$, или, иначе говоря, при вращении фигуры вокруг полюса A. Таким образом, из предыдущего равенства действительно следует, что

$$\boldsymbol{\upsilon}_M = \boldsymbol{\upsilon}_A + \boldsymbol{\upsilon}_{AM}$$

При этом скорость $\boldsymbol{\upsilon}_{MA}$, которую точка M получает при вращении фигуры вокруг полюса A, будет:

$$\upsilon_{AM} = \omega AM \quad \boldsymbol{\upsilon}_{AM} \perp \boldsymbol{AM}$$

где ω – угловая скорость фигуры.



Таким образом, ***скорость любой точки M плоской фигуры геометрически складывается из скорости какой-нибудь другой точки A, принятой за полюс, и скорости, которую точка M получает при вращении фигуры вокруг этого полюса***. Модуль и направление скорости $\boldsymbol{\upsilon}_M$ находятся построением соответствующего параллелограмма.

Сформулированное утверждение называется ***теоремой сложения скоростей при плоском движении.***

- **Теорема о проекции скоростей двух точек тела**

Определение скоростей точек плоской фигуры (или тела, движущегося плоскопараллельно) с помощью общей теоремы сложения скоростей обычно с довольно сложными расчетами. Однако исходя из этого основного результата, можно получить ряд других, практически более удобных и простых методов определения скоростей точек фигуры (или тела).

Один из таких методов дает теорема: ***проекции скоростей двух точек твердого тела на ось, проходящую через эти точки, равны друг другу.***

Рассмотрим какие-нибудь две точки A и B плоской фигуры (или тела). Принимая точку A за полюс, получаем

$$\boldsymbol{v}_B = \boldsymbol{v}_A + \boldsymbol{v}_{AB}$$

Отсюда, проектируя обе части равенства на ось, направленную по AB, и учитывая, что вектор $\boldsymbol{v}_{BA}$ перпендикулярен AB; находим

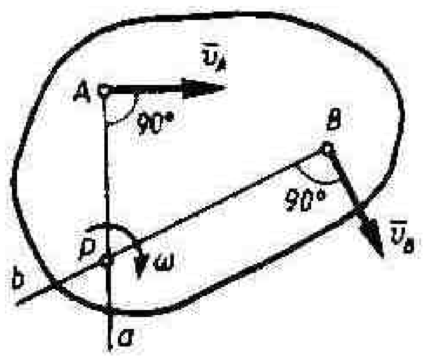
$$\upsilon_B \cos\beta = \upsilon_A \cos\alpha$$

и теорема доказана. Заметим, что этот результат ясен и из чисто физических соображений: если данная теорема не будет выполняться, то при движении расстояние между точками A и B должно изменяться, что невозможно, так как тело считается абсолютно твердым. Поэтому ***равенство проекций скоростей выполняется*** не только при плоскопараллельном, но ***и при <u>любом</u> движении твердого тела***.

• Понятие мгновенного центра скоростей

Мгновенным центром скоростей называется точка плоской фигуры, скорость которой в данный момент времени равна нулю.

Докажем ***теорему о существовании мгновенного центра скоростей.*** Пусть в момент времени t точки A и B плоской фигуры имеют скорости $\boldsymbol{\upsilon}_A$ и $\boldsymbol{\upsilon}_B$, не параллельные друг другу. Тогда точка P, лежащая на пересечении перпендикуляров Aa к вектору $\boldsymbol{\upsilon}_A$ и Bb к вектору $\boldsymbol{\upsilon}_B$, и будет мгновенным центром скоростей, так как $\boldsymbol{\upsilon}_P=0$. В самом деле, если допустить, что $\upsilon_P\neq0$ то по теореме о проекциях скоростей вектор $\boldsymbol{\upsilon}_P$ должен быть одновременно перпендикулярен и AP, (так как $\boldsymbol{\upsilon}_A\perp AP$) и BP (так как $\boldsymbol{\upsilon}_B\perp BP$), что невозможно. Из той же теоремы видно, что никакая другая точка фигуры в этот момент времени не может иметь скорость, равную нулю.



Если теперь в момент времени t взять точку P за полюс, то по общей теореме сложения скоростей скорость точки A будет

$$\boldsymbol{v}_A = \boldsymbol{v}_P + \boldsymbol{v}_{PA} = \left(\boldsymbol{v}_P = 0\right) = \boldsymbol{v}_{PA}$$

Аналогичный результат получается для любой другой точки фигуры.

Следовательно, ***скорости точек плоской фигуры определяются в данный момент времени так, как если бы движение фигуры было вращением вокруг мгновенного центра скоростей.***

При этом согласно могут быть записаны следующие соотношения

$$\upsilon_{PA} = \omega PA \quad \left(\boldsymbol{v}_{PA} \perp PA\right)$$

$$\upsilon_{PB} = \omega PB \quad \left(\boldsymbol{v}_{PB} \perp PB\right)$$

Следовательно

$$\frac{\upsilon_{PA}}{PA} = \frac{\upsilon_{PB}}{PB}$$

т. е. можно сделать вывод, что ***скорости точек плоской фигуры пропорциональны их расстояниям от мгновенного центра скоростей.***

• Свойства мгновенного центра скоростеей

Доказанная в предыдущем параграфе теорема и следствия из нее позволяют сформулировать следующие основные свойства мгновенного центра скоростей

1. ***Для определения мгновенного центра скоростей надо знать только направления скоростей $\boldsymbol{\upsilon}_A$ и $\boldsymbol{\upsilon}_B$ каких-нибудь двух точек A и B плоской фигуры (или траектории этих точек)***; мгновенный центр скоростей находится в точке пересечения перпендикуляров, восставленных из точек A и B к скоростям этих точек (или к касательным к траекториям).

2. ***Для определения скорости любой точки плоской фигуры надо знать модуль и направление скорости какой-нибудь одной точки A фигуры и направление скорости другой ее точки B.*** Тогда, восставив из точек A и B перпендикуляры к $\boldsymbol{\upsilon}_A$ и $\boldsymbol{\upsilon}_B$, построим мгновенный центр скоростей P и по направлению $\boldsymbol{\upsilon}_A$ определим направление поворота фигуры. После этого, зная $\boldsymbol{\upsilon}_A$, найдем по формуле

$$\frac{\upsilon_{PA}}{PA} = \frac{\upsilon_{PB}}{PB} = \frac{\upsilon_{PM}}{PM}$$

скорость $\boldsymbol{\upsilon}_M$ любой точки M плоской фигуры. Направлен вектор $\boldsymbol{\upsilon}_M$ перпендикулярно PM в сторону поворота фигуры.

3. ***Угловая скорость со плоской фигуры равна в каждый данный момент времени отношению скорости какой-нибудь точки фигуры к ее расстоянию от мгновенного центра скоростей P***:

$$\omega = \frac{\upsilon_{PA}}{PA}.$$

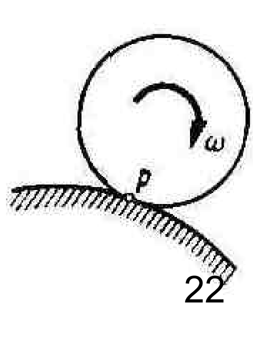
Найдем еще другое выражение для ω. Из общей теоремы сложения скоростей $\boldsymbol{\upsilon}_B = \boldsymbol{\upsilon}_A + \boldsymbol{\upsilon}_{AB}$ следует $\upsilon_{AB} = |\boldsymbol{\upsilon}_B - \boldsymbol{\upsilon}_A|$ кроме того $\upsilon_{AB} = \omega AB$ следовательно

$$\omega = \frac{|\boldsymbol{\upsilon}_B - \boldsymbol{\upsilon}_A|}{AB}$$

Когда $\boldsymbol{\upsilon}_A = 0$ (т.е. точка A — мгновенный центр скоростей), полученное соотношение переходит в аналогичное выражение выведенное через мгновенный цент скоростей.

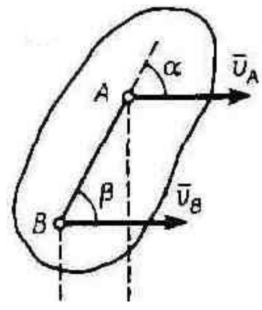
• Частные случаи положения мгновенного центра скоростей

а) Если плоскопараллельное движение осуществляется путем качения без скольжения одного цилиндрического тела по поверхности другого неподвижного, то точка P катящегося тела, касающаяся неподвижной поверхности, имеет в данный момент

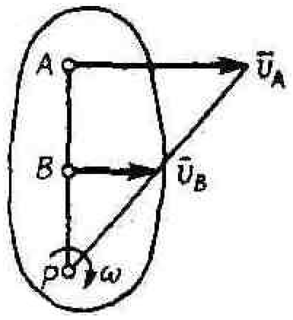


времени вследствие отсутствия скольжения скорость, равную нулю ($\mathbf{\upsilon}_P$=0), и, следовательно, является мгновенным центром скоростей. Примером служит качение колеса по рельсу.

б) Если скорости точек *A* и *B* плоской фигуры параллельны друг другу, причем линия *AB* не перпендикулярна $\mathbf{\upsilon}_A$, то мгновенный центр скоростей лежит в бесконечности и скорости всех точек параллельны $\mathbf{\upsilon}_A$. При этом из теоремы о проекциях скоростей следует, что $\upsilon_B \cos\beta = \upsilon_A \cos\alpha$ т.е. $\upsilon_B = \upsilon_A$; аналогичный результат получается для всех других точек. Следовательно, в рассматриваемом случае скорости всех точек фигуры в данный момент времени равны друг другу и по модулю, и по направлению, т. е. фигура имеет мгновенное поступательное распределение скоростей (такое состояние движения тела называют еще ***мгновенно поступательным***). Угловая скорость и тела в этот момент времени равна нулю.



в) Если скорости точек *A* и *B* плоской фигуры параллельны друг другу и при этом линия *AB* перпендикулярна $\mathbf{\upsilon}_A$, то мгновенный центр скоростей *P* определяется построением, показанным на рисунке. В этом случае, в отличие от предыдущих, для нахождения центра *P* надо кроме направлений знать еще и модули скоростей $\mathbf{\upsilon}_A$ и $\mathbf{\upsilon}_B$.



г) Если известны вектор скорости $\mathbf{\upsilon}_B$ какой-нибудь точки *B* фигуры и ее угловая скорость ω, то положение мгновенного центра скоростей *P*, лежащего на перпендикуляре к $\mathbf{\upsilon}_B$, можно найти из равенства $PB = \upsilon_B / \omega$.

Лекция 4
Динамика точки.
Дифференциальные уравнения движения материальной точки.

• Динамика как раздел механики

Динамикой называется раздел механики, в котором ***изучается движение материальных тел под действием сил.***

С геометрической точки зрения движение материальных тел рассматривалось в кинематике. В динамике, в отличие от кинематики, при изучении движения тел принимают во внимание как действующие на них силы, так и ***инертность*** самих ***материальных тел***. При этом ***в динамике***, в отличии от статики, ***силы могут быть переменными***, т.е. менять модули и направления действия при движении тела. изменяются. Такие переменные силы могут определенным образом зависеть от времени, положения тела и его скорости.

Следует отметить, что все введенные в статике понятия и полученные там результаты относятся в равной мере и к переменным силам, так как условие постоянства сил нигде в статике не использовалось.

Инертность тела проявляется в том, что оно сохраняет свое движение при отсутствии действующих сил, а когда на него начинает действовать сила, то скорости точек тела изменяются не мгновенно, а постепенно и тем медленнее, чем больше инертность этого тела. ***Количественной мерой инертности материального тела*** является физическая величина, называемая ***массой тела***. В классической механике масса т рассматривается как величина скалярная, положительная и постоянная для каждого данного тела.

Кроме суммарной массы движение тела зависит еще в общем случае от формы тела, точнее от взаимного расположения образующих его частиц, т. е. от распределения масс в теле.

Чтобы при первоначальном изучении динамики отвлечься от учета формы тела (распределения масс), вводят абстрактное понятие ***о материальной точке, как о точке, обладающей массой,*** и начинают изучение динамики с динамики материальной точки.

Из кинематики известно, что движение тела слагается в общем случае из поступательного и вращательного. При решении конкретных задач материальное тело можно рассматривать как материальную точку в тех случаях, когда по условиям задачи допустимо не принимать во внимание вращательную часть движения тела.

Изучать динамику мы начнем с динамики материальной точки, так как естественно, что изучение движения одной точки должно предшествовать изучению движения системы точек и, в частности, твердого тела.

• Законы динамики

В основе динамики лежат законы, установленные путем обобщения результатов целого ряда опытных фактов и наблюдений. Систематически законы динамики были впервые изложены И. Ньютоном в его классическом сочинении «Математические начала натуральной философии», изданном в 1687 г. Сформулировать эти законы можно следующим образом.

Первый закон (закон инерции): изолированная от внешних воздействий материальная точка сохраняет свое состояние покоя или равномерного прямолинейного движения до тех пор, пока приложенные силы не заставят ее изменить это состояние.

Движение, совершаемое точкой при отсутствии сил, называется ***движением по инерции***.

Закон инерции отражает одно из основных свойств материи – пребывать, неизменно в движении. Важно отметить, что развитие динамики как науки стало возможным лишь после того, как Галилеем был открыт этот закон (1638 г.) и тем самым опровергнута господствовавшая со времен Аристотеля точка зрения о том, что движение тела может происходить только под действием силы.

Существенным является вопрос о том, по отношению к какой системе отсчета справедлив закон инерции. В связи с этим в механике вводят понятие о системе отсчета, в которой справедлив закон инерции, постулируют ее существование и называют ***инерциальной системой отсчета***.

Второй закон (основной закон динамики) устанавливает, как изменяется скорость точки при действии на нее какой–нибудь силы, а именно: произведение массы материальной точки на ускорение, которое она получает под действием данной силы, равно по модулю этой силе, а направление ускорения совпадает с направлением силы.

Математически этот закон выражается векторным равенством

$$m\boldsymbol{a} = \boldsymbol{F}$$

При этом между модулями ускорения и силы имеет место зависимость

$$ma = F$$

Второй закон динамики, как и первый, имеет место ***только по отношению к инерциальной системе отсчета***.

Из этого закона непосредственно видно, что мерой инертности материальной точки является ее масса, поскольку при действии данной силы точка, масса которой больше, т.е. более инертная, получит меньшее ускорение и наоборот.

Если на точку действует одновременно несколько сил, то они будут эквивалентны одной силе, т. е. равнодействующей $\boldsymbol{R}$, равной геометрической сумме данных сил. Уравнение, выражающее основной закон динамики, принимает в этом случае вид

$$m\boldsymbol{a} = \sum_k \boldsymbol{F}_k$$

Третий закон (закон равенства действия и противодействия) устанавливает характер механического взаимодействия между материальными телами. Для двух материальных точек он гласит: две материальные точки действуют друг на друга с силами, равными по модулю и направленными вдоль прямой, соединяющей эти точки, в противоположные стороны.

Данный закон играет большую роль в динамике системы материальных точек, как устанавливающий зависимость между действующими на эти точки внутренними силами.

• Задачи динамики

Для свободной материальной точки задачами динамики являются следующие:

- первая задача динамики: ***зная закон движения точки, определить действующую на нее силу***
- вторая или "основная" задача динамики: ***зная действующие на точку силы, определить закон движения точки***.

Для несвободной материальной точки, т. е. точки, на которую наложена связь, вынуждающая ее двигаться по заданной поверхности или кривой, первая задача динамики обычно состоит в том, чтобы, зная движение точки и действующие на нее активные силы, определить реакцию связи. Вторая (основная) задача динамики при несвободном движении распадается на две и состоит в том, чтобы, зная действующие на точку активные силы, определить: а) закон движения точки, б) реакцию наложенной связи.

• Основные виды сил

При решении задач динамики мы будем в основном рассматривать следующие постоянные или переменные силы.

Сила тяжести. Это постоянная сила $\boldsymbol{P}$, действующая на любое тело, находящееся вблизи земной поверхности. Модуль силы тяжести равен весу тела.

Опытом установлено, что под действием силы $\boldsymbol{P}$ любое тело при свободном падении на Землю (с небольшой высоты и в безвоздушном пространстве) имеет одно и то же ускорение $\boldsymbol{g}$, называемое ***ускорением свободного падения***. Тогда из второго закона Ньютона следует

$$P = mg$$

Сила трения. Так будем кратко называть силу трения скольжения, действующую (при отсутствии жидкой смазки) на движущееся тело. Ее модуль определяется равенством

$$F = fN$$

где f – кффициент трения, который будем считать постоянным; N – нормальная реакция.

Сила тяготения. Это сила, с которой два материальных тела притягиваются друг к другу по закону всемирного тяготения, открытому Ньютоном. Сила тяготения зависит от расстояния и для двух материальных точек с массами m_1 и m_2, находящихся на расстоянии r друг от друга, и выражается равенством

$$F = G\frac{m_1 m_2}{r^2}$$

где G – гравитационная постоянная (в СИ G=6.673x10^{-11} м^3/кг с^2).

Сила упругости. Эта сила тоже зависит от расстояния. Ее значение можно определить исходя из закона Гука, согласно которому напряжение (сила, отнесенная к единице площади) пропорционально деформации. В частности, для силы упругости пружины получается значение

$$F = c\lambda$$

где λ – удлинение (или сжатие) пружины; c – коэффициент жесткости пружины (в СИ измеряется в Н/м).

Сила вязкого трения. Такая сила, зависящая от скорости, действует на тело при его медленном движении в очень вязкой среде (или при наличии жидкой смазки) и может быть выражена равенством

$$R = \mu\upsilon$$

где υ – скорость тела; μ – коэффициент сопротивления.

Сила аэродинамического (гидродинамического) сопротивления. Эта сила тоже зависит от скорости и действует на тело, движущееся в такой, например, среде, как воздух или вода. Обычно ее величину выражают равенством

$$R = 0.5c_x\rho S\upsilon^2$$

где ρ – плотность среды; S – площадь проекции тела на плоскость, перпендикулярную направлению движения (площадь миделя); c_x – безразмерный коэффициент сопротивления, определяемый обычно экспериментально и зависящий от формы тела и от того, как оно ориентировано при движении.

• Дифференциальные уравнения движения материальной точки

В основе решения задач динамики точки лежит использование второго закона динамики. Этот закон векторный, а значит нам надо перейти от векторной формы записи к скалярной, для чего в свою очередь необходимо конкретизировать вид используемой системы координат.

Уравнения движения в декартовых координатах. Рассмотрим материальную точку, движущуюся под действием сил $\boldsymbol{F}_1$, $\boldsymbol{F}_2$, …, $\boldsymbol{F}_n$ по отношению к инерциальной системе отсчета $Oxyz$. Проектируя обе части равенства $m\boldsymbol{a} = \sum\limits_k \boldsymbol{F}_k$ оси x, y, z и учитывая, что $a_x = d^2x/dt^2$ и т. д., получим:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = \sum_k F_{kx}, \quad m\frac{d^2y}{dt^2} = \sum_k F_{ky}, \quad m\frac{d^2z}{dt^2} = \sum_k F_{kz}$$

или

$$m\ddot{x} = \sum_k F_{kx}, \quad m\ddot{y} = \sum_k F_{ky}, \quad m\ddot{z} = \sum_k F_{kz}$$

Это и будут искомые уравнения, т. е. ***дифференциальные уравнения движения точки в прямоугольных декартовых координатах***. Так как действующие силы могут зависеть от времени, от положения точки и от скорости, то в общем случае правая часть каждого из уравнений может быть функцией этих переменных, т. е. $t, x, y, z, \upsilon_x, \upsilon_y, \upsilon_z$ одновременно.

Уравнения в проекциях на оси естественного трехгранника. Для получения этих уравнений спроектируем обе части равенства $m\boldsymbol{a} = \sum_k \boldsymbol{F}_k$ на оси $M\tau nb$, т. е. на касательную $M\tau$ к траектории точки, главную нормаль Mn и бинормаль Mb. Тогда, учитывая, что

$$a_\tau = \frac{d\upsilon}{dt}, \quad a_n = \frac{\upsilon^2}{\rho}, \quad a_b = 0$$

получим

$$m\frac{d\upsilon}{dt} = \sum_k F_{k\tau}, \quad m\frac{\upsilon^2}{\rho} = \sum_k F_{kn}, \quad 0 = \sum_k F_{kb}$$

Полученные уравнения, представляют собой ***дифференциальные уравнения движения точки в проекциях на оси естественного трехгранника***.

• Решение основной задачи динамики при прямолинейном движении точки

Движение материальной точки будет прямолинейным, когда действующая на нее сила (или равнодействующая приложенных сил) имеет постоянное направление, а скорость точки в начальный момент времени равна нулю или направлена вдоль силы.

Если при прямолинейном движении направить вдоль траектории координатную ось Ox, то движение точки будет определяться одним скалярным дифференциальным уравнением вида

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = \sum_k F_{kx} \quad m\ddot{x} = \sum_k F_{kx}$$

Данное уравнение называют дифференциальным уравнением прямолинейного движения точки. Иногда его удобнее заменить двумя уравнениями, содержащими первые производные:

$$m\frac{d\upsilon}{dt} = \sum_k F_{kx} \quad \frac{dx}{dt} = \upsilon$$

Т.о. решение основной задачи динамики сводится к тому, чтобы из данных уравнений, зная силы, найти закон движения точки, т. е. $x=f(t)$. Для этого надо проинтегрировать соответствующее дифференциальное уравнение второго порядка. При этом очевидно, что общее решение дифференциального уравнения второго порядка будет иметь вид

$$x = x(t, C_1, C_2),$$

где C_1 и C_2 – произвольные постоянные интегрирования.

Чтобы довести решение каждой конкретной задачи до конца, надо определить значения постоянных C_1 и C_2. Для этого используются ***начальные условия.***

Изучение всякого движения будем начинать с некоторого определенного момента времени, называемого ***начальным моментом***. От этого момента будем отсчитывать время движения, считая, что в начальный момент $t=0$. Обычно за начальный принимают момент начала движения под действием заданных сил. Положение, которое точка занимает в начальный момент, называется начальным положением, а ее скорость в этот момент – ***начальной скоростью***. Чтобы однозначно решить основную задачу динамики, надо кроме действующих сил знать еще начальные условия, т. е. положение и скорость точки в начальный момент времени.

В случае прямолинейного движения начальные условия задаются в виде

при $t = 0, \quad x = x_0, \quad \upsilon = \upsilon_0$

По начальным условиям можно определить конкретные значения постоянных C_1 и C_2 и найти частное решение дифференциального уравнения, задающее закон движения точки, в виде

$x = x(t, x_0, \upsilon_0)$.

В целом решение задач динамики точки путем интегрирования соответствующих дифференциальных уравнений движения, сводится к следующим операциям.

1. ***Составление дифференциального уравнения движения.*** Для его составления в случае прямолинейного движения надо:

а) выбрать начало отсчета (как правило, совмещая его с начальным положением точки) и провести координатную ось, направляя ее вдоль траектории и, как правило, в сторону движения; если под действием приложенных сил точка может находиться в каком–нибудь, положении в равновесии, то начало отсчета удобно помещать в положении статического равновесия;

б) изобразить движущуюся точку в произвольном положении (но так, чтобы было $x>0$ и $\upsilon>0$; последнее существенно, когда среди сил есть силы, зависящие от скорости) и показать все действующие на точку силы;

в) подсчитать сумму проекций всех сил на координатную ось и подставить эту сумму в правую часть дифференциального уравнения движения; при этом надо обязательно все переменные силы выразить через те величины t, x или υ), от которых эти силы зависят.

2. ***Интегрирование дифференциального уравнения движения.***
3. ***Определение постоянных интегрирования.***
4. ***Нахождение искомых в задаче величин и исследование полученных результатов.***

В качестве иллюстрации намеченной схемы решения задачи рассмотрим конкретные задачи, в которых сила F, действующая на материальную точку массы m

1. является постоянной (F_0, начальные условия x_0, υ_0);
2. зависит от времени ($F=F_0\exp(-t/\tau)$, начальные условия x_0, υ_0);
3. зависит от скорости ($F=-\mu\upsilon^2$, начальные условия $x_0=0$, $\upsilon_0\neq0$);
4. зависит от расстояния ($F=kx^3$, начальные условия $x_0=0$, $\upsilon_0=0$).

Лекция 5

Динамика механических систем.
Теорема о движении центра масс

• Понятие механической системы

Понятие механической системы. Деление сил на внешние и внутренние. Условность этого деления на примере Солнечной системы.

Свойства внутренних сил

1. Главный вектор всех внутренних сил равен нулю;
2. Главный момент системы относительно любого центра или оси равен нулю.

• Задачи динамики системы и общие теоремы динамики систем

Общая задача динамики системы – определение движения каждой из точек системы. В такой постановке она чрезмерно сложна и поддается решению лишь в исключительных случаях. Однако на практике ее решение, как правило, и не требуется, например, для описания движения кривошипно-ползунного механизма достаточно задать зависимость угла поворота кривошипа от времени. Для решения таких сокращенных задач в инженерной практике применяются специальные методы основанные на т.н. общих теоремах динамики.

Существуют 4-и общие теоремы динамики

1. Теорема о движении центра масс;
2. Теорема о количестве движения (теорема об изменении импульса);
3. Теорема о изменении момента количества движения (момента импульса);
4. Теорема о изменении кинетической энергии системы;

• Массы системы и центра масс

Масса системы равна арифметической сумме масс всех точек или тел образующих систему.

В понятии массы системы никоим образом не учитывается распределение масс. Оказывается, что для учета распределения масс достаточно задать координаты центра масс и осевые моменты инерции.

Геометрическая точка C положение которой определяется формулами

$$x_C = \frac{\sum\limits_k m_k x_k}{\sum\limits_k m_k}, \quad y_C = \frac{\sum\limits_k m_k y_k}{\sum\limits_k m_k}, \quad z_C = \frac{\sum\limits_k m_k z_k}{\sum\limits_k m_k}$$

либо

$$\mathbf{r}_C = \frac{\sum\limits_k m_k \mathbf{r}_k}{\sum\limits_k m_k}$$

называется центром масс или центром инерции механической системы.

• Момент инерции тела относительно оси. Радиус инерции

Масса – мера инертности системы, но при вращательном движении одной массы мало. Рассмотрим пример с фигуристом сводящем руки при вращении вокруг оси.

Мерой инертности тела при вращательном движении является осевой момент инерции.

Моментом инерции системы относительно данной оси Oz называется скалярная величина, равная сумме произведений масс всех точек тела на квадраты расстояний от этой оси:

$$J_z = \sum_k m_k h_k^2$$

Для определения осевых моментов инерции можно расстояние точек от осей выражать через координаты x_k, y_k, z_k этих точек. Тогда момент инерции относительно координатных осей будут определяться как

$$J_x = \sum_k m_k (y_k^2 + z_k^2), \quad J_y = \sum_k m_k (x_k^2 + z_k^2), \quad J_z = \sum_k m_k (y_k^2 + x_k^2)$$

Часто в ходе расчетов пользуются понятием радиуса инерции. Радиусом инерции тела относительно оси Oz называется линейная величина ρ_z

$$J_z = M\rho_z^2$$

Смысл этого понятия – расстояние от оси до точки в которой надо сосредоточить массу всего тела, что бы момент инерции этой точки был равен моменту инерции тела.

В случае сплошного тела при определении момента инерции его надо развивать на элементарные ячейки. В этом случае сумма превратится в интеграл

$$J_z = \int\limits_{(V)} h^2 dm = \int\limits_{(V)} \rho h^2 dV$$

Проведем вычисление осевых моментов инерции основных геометрических тел.

- Однородный круглый цилиндр

$$J_z = \int\limits_{(V)} \rho r^2 dh 2\pi r dr = 2\pi\rho \int\limits_0^H dh \int\limits_0^R r^3 dr = \pi\rho H \frac{R^4}{2} = \frac{MR^2}{2}$$

- Однородный тонкий стержень относительно конца

$$J = \frac{Ml^2}{3}$$

- Сплошная прямоугольная пластина со сторонами AB=a и ВД=b

$$J_{AB} = \frac{Mb^2}{3}, \quad J_{BD} = \frac{Ma^2}{3}$$

- Прямой сплошной однородный круглый конус

$$J = 0.3MR^2$$

- Сплошной шар

$$J = 0.4MR^2$$

Теорема Гюйгенса: ***момент инерции тела относительно данной оси равен моменту инерции тела относительно оси ей параллельной и проходящей через центр масс тела сложенному с произведением массы всего тела на квадрат расстояния между осями.***

- ## **Теорема о движении центра масс.**

Движение механической системы, состоящей из n частиц описывается системой n диф. ур-ний вида

$$m_k \mathbf{a}_k = \mathbf{F}_k^{(e)} + \mathbf{F}_k^{(i)}. \tag{1}$$

Такая система может быть решена только численными методами и только с применением ЭВМ. Но и в этом случае удается рассмотреть системы содержащие не более 1000 частиц (понятие о методе молекулярной динамики). Поэтому в основе инженерных расчетов лежит использование теорем механики. Одна такая теорема нам известна – это теорема о кинетической энергии. Рассмотрим иные теоремы.

Сложим левые и правые части соотношения (1)

$$\sum_k m_k \mathbf{a}_k = \sum_k \mathbf{F}_k^{(e)} + \sum_k \mathbf{F}_k^{(i)}, \quad \sum_k \mathbf{F}_k^{(i)} = 0. \tag{2}$$

$$\sum_k m_k \mathbf{a}_k = \sum_k m_k \frac{d^2 \mathbf{r}_k}{dt^2} = \sum_k \frac{d^2 m_k \mathbf{r}_k}{dt^2} = \frac{d^2}{dt^2} \sum_k m_k \mathbf{r}_k =$$

$$\frac{d^2}{dt^2}\left(\sum_k m_k \frac{\sum_k m_k \mathbf{r}_k}{\sum_k m_k} \right) = M \frac{d^2 \mathbf{r}_C}{dt^2} = M\mathbf{a}_C \tag{3}$$

$$M\mathbf{a}_C = \sum_k \mathbf{F}_k^{(e)} \tag{4}$$

Уравнение (4) и выражает теорему о движении центра масс системы. Произведение массы системы на ускорение ее центра масс равно сумме всех внутренних сил действующих на систему. Спроектировав (4) на координатные оси можно получить диф. ур. движения центра масс в проекциях на оси координат.

Значение теоремы.

1. Теорема дает обоснование методам динамики точки. Если тело рассматривается как мат. точка то полученный закон движения – закон движения центра масс этого тела. Т.к. при поступательном движении движение тела определяется движением его центра масс, то поступательно движущееся тело всегда моделируется мат. точкой.
2. Теорема позволяет при изучении движения центра масс исключить из рассмотрения неизвестные внутренние силы. Поэтому при решении задач с ее помощью нужно стремиться неизвестные наперед силы сделать внутренними.

- ## **Закон сохранения движения центра масс.**

Предположим, что $\sum_k \mathbf{F}_k^{(e)} = 0$, тогда

$$M\mathbf{a}_C = 0 \tag{5}$$

откуда следует, что $\mathbf{a}_c=0$, а $\boldsymbol{\upsilon}_c=\mathrm{const}$. Т.е. если сумма всех внешних сил равна нулю, то тело движется равномерно и прямолинейно (скорость не меняется ни по величине, ни по времени).

Если в ноль обращается сумма каких либо координат всех внешних сил, то система движется вдоль заданного направления с постоянной скоростью. В частности, если первоначально система покоилась, то положение ее центра масс не изменится.

- **Пример решения задачи**

На корме и носу лодки массы P сидят два человека масс m_1 и m_2 на расстоянии l друг от друга. Как переместится лодка если они поменяются местами. Сопротивлением воды пренебречь. ($x=(m_1-m_2)l/P$)

Лекция 6
Теорема об изменении кинетической энергии

- **Кинетическая энергия материальной точки и механической системы**

Кинетической энергией мат. точки называется скалярная величина равная **половине произведения массы точки на квадрат скорости ее движения**

$$K = \frac{m\upsilon^2}{2}$$

Единицей измерения энергии является джоуль

$1\ddot{A}æ = 1\hat{e}\tilde{a}*\grave{\imath}^{2}/c^{2}$.

Данное соотношение естественным образом может быть обобщено и на систему материальных точек: кинетическая энергия системы – сумма кинетических энергий точек составляющих эту систему.

$$K = \frac{1}{2}\sum_k m_k \upsilon_k^2$$

Рассмотри в качестве механической системы твердое тело.

Поступательное движение

Все точки движутся с одинаковыми скоростями равными скорости центра масс тела, поэтому

$$K = \frac{1}{2}\sum_k m_k \upsilon_k^2 = \frac{\upsilon_C^2}{2}\sum_k m_k = \frac{M\upsilon_C^2}{2}$$

Вращательное движение

Скорость любой точки может быть определена через угловую скорость тела

$$K = \frac{1}{2}\sum_k m_k \upsilon_k^2 = \frac{1}{2}\sum_k m_k \omega^2 h_k^2 = \frac{\omega^2}{2}\sum_k m_k h_k^2 = \frac{\omega^2 J}{2}$$

Плоскопараллельное движение

Если в качестве полюса выбрать центр масс (C=P), то выражение для кинетической энергии принимает вид

$$K = \frac{M\upsilon_C^2}{2} + \frac{J_{Cz}\omega^2}{2},$$

где υ_C и J_{Cz} скорость центра масс и осевой момент инерции относительно ось проходящей через центр масс.

В качестве полюса также может быть рассмотрен и мгновенный центр скоростей (C_V=P). Тогда $\upsilon_{C_V} = 0$ и для кинетической энергии получаем

$$K = \frac{J_{C_V z}\omega^2}{2}.$$

При этом необходимо помнить, что в последнем случае ось вращения проходит через МЦС, а значит для осевого момента инерции может быть использована теорема Гюйгенса

$$J_{C_V z} = J_{Cz} + Mr^2_{CC_V}$$

Подставим это в выражение для кинетической энергии

$$K = \frac{J_{C_V z}\omega^2}{2} = \frac{\left(J_{Cz} + Mr^2_{CC_V}\right)\omega^2}{2} = \frac{J_{Cz}\omega^2}{2} + \frac{Mr^2_{CC_V}\omega^2}{2} = \frac{J_{Cz}\omega^2}{2} + \frac{M\upsilon_C^2}{2}.$$

Т.о. очевидно, что оба выражения являются эквивалентными.

• Работа силы. Мощность

Работа – характеристика действия, оказываемого силой на тело при некотором его перемещении.

Элементарной работой силы **F** приложенной в точке *M* называется скалярная величина

$$dA = F_\tau ds,$$

где ds – модуль элементарного перемещения точки *M*.

Если учесть, что $ds=|d\mathbf{r}|$, а $F_\tau=F\cos\alpha$, то последнее соотношение может быть записано как

$$\delta A = F_\tau ds = F\cos\alpha\left|d\mathbf{r}\right| = Fdr\cos\alpha = \mathbf{F}d\mathbf{r},$$

Т.о. элементарная работа равна скалярному произведению силы на вектор элементарного перемещения точки ее приложения. Из этого определения сразу следует, что работа равна нулю если линия действия силы и перемещение тела ортогональны. Пример такой силы – сила Лоренца, действующая на электрон в магнитном поле.

Согласно правилам раскрытия скалярного произведения для элементарной работы может быть записано следующее выражение

$$\delta A = F_x dx + F_y dy + F_z dz,$$

Все эти соотношения применимы лишь для элементарной работы, т.е. работы на бесконечно малом перемещении. Работа же на любом конечном перемещении равна взятому вдоль этого перемещения интегралу от элементарной работы

$$A_{(M_0M_1)} = \int\limits_{M_0}^{M_1} F_\tau ds = \int\limits_{M_0}^{M_1} (F_x dx + F_y dy + F_z dz),$$

Если сила постоянна по величине и направлению, а точка к которой приложена сила движется прямолинейно, то в этом случае

$$F_\tau = F\cos\alpha = const$$

и

$$A_{(M_0M_1)} = Fs_1\cos\alpha,$$

где s_1 – конечное перемещение.

Мощность – работа совершаемая силой в единицу времени («скорость работы»)

$$N=\frac{dA}{dt}=\frac{\mathbf{F}d\mathbf{r}}{dt}=\mathbf{F}\frac{d\mathbf{r}}{dt}=\mathbf{F}\boldsymbol{\upsilon}=F\upsilon\cos\alpha$$

В системе СИ работа измеряется 1 джоулях (1 Дж=1 кг м^2/с^2), а мощность в ваттах (1 Вт=1 Дж/с).

• Примеры вычисления работы

Работа силы тяжести.

Есть две точки $M_1(x_1,y_1,z_1)$ и $M_2(x_2,y_2,z_2)$. Ось z направим вверх. Тогда для силы тяжести имеем $P_x=P_y=0$, $P_z=-P$.

$$A_{(M_1M_2)}=\int_{M_1}^{M_2}(P_xdx+P_ydy+P_zdz)=\int_{z_1}^{z_2}P_zdz=-P(z_2-z_1)=P(z_1-z_2),$$

Т.о. работа силы тяжести равна плюс/минус весу тела умноженному на вертикальное перемещение тела. Знак плюс – если тело падает, минус – если подымается. Как видно, работа силы тяжести не зависит от вида траектории, а определяется только конечным и начальным положениями тела. Силы обладающее таким свойством называются **потенциальными**.

Работа силы упругости.

Рассмотрим свободные одномерные колебания. При выборе начала координат в положении статического равновесия для силы упругости может быть записано следующее выражение

$$F_x=-cx,\quad F_y=F_z=0$$

и тогда

$$A_{(M_1M_2)}=\int_{M_1}^{M_2}(F_xdx+F_ydy+F_zdz)=-c\int_{x_1}^{x_2}xdx=\frac{c}{2}(x_1^2-x_2^2)=\frac{c}{2}(\lambda_1^2-\lambda_2^2),$$

Можно показать, что эта формула допускает обобщение на случай не прямолинейного движения, т.е. сила упругости также потенциальна.

Работа силы трения скольжения.

$$F_{тр}=-fN$$

и

$$A_{(M_1M_2)}=\int_{M_1}^{M_2}F_{тр}ds=-\int_{M_1}^{M_2}fNds=\left|\begin{matrix}\text{если сила трения}\\ \text{постоянна}\end{matrix}\right|=-F_{тр}s$$

т.о. работа зависит от пройденного пути, т.е. от траектории, а значит сила трения непотенциальна.

Работа силы трения качения.

Если происходит качения без проскальзывания, то силы трения качения приложена в точке соприкосновения тела и плоскости, т.е. в точке МЦС. А т.к. скорость этой точки равна 0, то элементарное перемещение также 0 и работа равна нулю.

Работа силы, приложенной к вращающемуся телу.

$$dA=F_\tau ds=F_\tau hd\varphi=Md\varphi,$$

В случае постоянного момента имеем

$$A = M\varphi,$$

а мощность соответственно равна

$$N = M\omega.$$

• Теорема об изменении кинетической энергии точки

Рассмотрим производную от кинетической энергии точки

$$\frac{dK}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{m\upsilon^2}{2}\right) = \frac{m}{2}\frac{d\boldsymbol{\upsilon}\boldsymbol{\upsilon}}{dt} = \frac{m}{2}\left(2\boldsymbol{\upsilon}\frac{d\boldsymbol{\upsilon}}{dt}\right) = m\boldsymbol{\upsilon}\mathbf{a} = \boldsymbol{\upsilon}(m\mathbf{a}) =$$

$$= \boldsymbol{\upsilon}\sum_k \mathbf{F}_k = \sum_k \boldsymbol{\upsilon}\mathbf{F}_k = \sum_k N_k(\mathbf{F}_k)$$

Полученное соотношение и выражает ***теорему об изменении кинетической энергии в дифференциальной форме*: производная от кинетической энергии по времени равна сумме мощностей сил действующих на материальную точку.**

Рассмотрим полученное соотношение как дифференциальное уравнение, разделим в нем переменные и проинтегрируем

$$\int dK = \int \sum_k N_k(\mathbf{F}_k)dt, \quad K - K_0 = \sum_k \int N_k(\mathbf{F}_k)dt = \sum_k A_k(\mathbf{F}_k)$$

Очевидно, что произвольная постоянная интегрирования в полученном соотношении имеет смысл начальной кинетической энергии. Само это соотношение выражает ***теорему об изменении кинетической энергии в интегральной форме*: изменение кинетической энергии равно сумме работ сил действующих на материальную точку.**

• Теорема об изменении кинетической энергии механической системы

Как было отмечено выше кинетическая энергия системы есть сумма кинетических энергий отдельных точек механической системы. Это позволяет записать следующее

$$K = \sum_i K_i, \quad \frac{dK}{dt} = \sum_i \frac{dK_i}{dt} = \sum_{i,k} N_{ik}(\mathbf{F}_{ik})$$

Учитывая что в механической системе силы могут быть разделены на внешние и внутренние получаем

$$\frac{dK}{dt} = \sum_k N_k^{(e)}(\mathbf{F}_k^{(e)}) + \sum_k N_k^{(i)}(\mathbf{F}_k^{(i)})$$

Производная от кинетической энергии по времени равна сумме мощностей всех внешних и внутренних сил действующих на механическую систему.

Аналогичным образом может быть проведено и обобщение на случай механической системы и интегральной формулировки теоремы

$$K - K_0 = \sum_k A_k^{(e)}(\mathbf{F}_k^{(e)}) + \sum_k A_k^{(i)}(\mathbf{F}_k^{(i)})$$

Изменение кинетической энергии равно сумме работ всех внешних и внутренних сил действующих на механическую систему.

Таким образом в отличии от изученных ранее теорем ***в теорему об изменении кинетической энергии входят внутренние силы.*** Наличие в формулировке теоремы внутренних сил существенно затрудняет ее использование при решении задач.

• Неизменяемая механическая система и система с идеальными связями

Как было подчеркнуто ранее включение в рассмотрение работ и мощностей внутренних сил существенно затрудняет применение теоремы об изменении кинетической энергии для решения задач. Поэтому, является целесообразным рассмотреть два важных частных случая механических систем.

1. Неизменяемая система.

Неизменяемая система – система, в которой **расстояние между каждыми двумя взаимодействующими точками остаются во все время движения постоянным**. Очевидно, что примером неизменяемой системы может служить твердое тело.

Можно показать, что в неизменяемой системе сумма работ, а значит и мощностей, всех внутренних сил равна нулю. Это позволяет записать теорему об изменении кинетической энергии в следующем виде

$$\frac{dK}{dt} = \sum_k N_k^{(e)}(\mathbf{F}_k^{(e)})$$

$$K - K_0 = \sum_k A_k^{(e)}(\mathbf{F}_k^{(e)})$$

2. Система с идеальными связями.

Система с идеальными связями – система в которой сумма работ всех реакций связей, не изменяющихся со временем, на элементарных перемещениях равна нулю. Т.о. ***изменение кинетической энергии системы с идеальными***, не изменяющимися со временем ***связями*** при любом ее перемещении ***равно сумме работ*** на этом перемещении приложенных к системе внешних и внутренних ***активных сил***.

Практическая ценность теоремы об изменении кинетической энергии состоит в том, что при неизменяющихся со временем идеальных связях она позволяет исключить из уравнений движения все наперед неизвестные реакции связей.

Лекция 7

Теорема об изменении количества движения и теорема моментов

- **Понятие количества движения материальной точки и теорема об изменении количества движения материальной точки**

Под количеством движения точки массы m будем понимать величину равную

$$\mathbf{Q} = m\boldsymbol{\upsilon}$$

где $\boldsymbol{\upsilon}$ – скорость точки.

Дифференцируя данное соотношение по времени получаем

$$\frac{d\mathbf{Q}}{dt} = \frac{dm\boldsymbol{\upsilon}}{dt} = m\frac{d\boldsymbol{\upsilon}}{dt} = m\mathbf{a} = \sum_i \mathbf{F}_i$$

Данное соотношение выражает **теорему об изменении количества движения точки** в дифференциальной форме: ***производная по времени от количества движения точки равна сумме действующих на точку сил.***

Наряду с дифференциальной формой записи может быть получена и интегральная форма записи. Для этого рассмотрим дифференциальную форму теоремы как дифференциальное уравнение первого порядка

$$\frac{d\mathbf{Q}}{dt} = \sum_i \mathbf{F}_i \Rightarrow d\mathbf{Q} = \sum_i \mathbf{F}_i dt \Rightarrow \int d\mathbf{Q} = \int \sum_i \mathbf{F}_i dt \Rightarrow \mathbf{Q}(t=\tau) - \mathbf{Q}(t=0) = \sum_i \mathbf{S}_i \,,$$

где $\mathbf{S}_i = \int\limits_0^\tau \mathbf{F}_i dt$ - импульс силы.

Таким образом, теорема об изменении количества движения в **интегральной форме** может быть сформулирована следующим образом: ***изменение количества движения точки равно импульсу силы.***

Обсудить эквивалентность и различие дифференциалной и интегральной формулировок теоремы.

- **Количество движения механической системы**

Поскольку механическая система, это прежде всего совокупность материальных точек, то тогда количество движения системы точек – сумма количеств движения отдельных ее частей

$$\mathbf{Q} = \sum_k m_k \boldsymbol{\upsilon}_k$$

Попробуем упростить это выражение, а именно избавится в нем от суммирования.

$$\mathbf{Q} = \sum_k m_k \boldsymbol{\upsilon}_k = \sum_k m_k \frac{d\mathbf{r}_k}{dt} = \sum_k \frac{dm_k \mathbf{r}_k}{dt} = \frac{d}{dt}\sum_k m_k \mathbf{r}_k = \frac{dM\mathbf{r}_C}{dt} = M\boldsymbol{\upsilon}_C \,.$$

Т.о. момент количества движения системы равен массе системы умноженной на скорость ее центра масс.

Ели центр масс системы неподвижен, то количество движения равно 0. Например, такая ситуация имеет место при вращении ТТ вокруг оси проходящей через центр масс тела.

Это позволяет сделать вывод, что количество движения – ***характеристика поступательного движения механической системы.***

• Теорема об изменении количества движения механической системы

Как и в случае с материальной точкой выполним продифференцируем количество движения механической системы и применим доказанную ранее теорему о движении центра масс

$$\frac{d\mathbf{Q}}{dt} = \frac{dM\mathbf{v}_C}{dt} = M\frac{d\mathbf{v}_C}{dt} = M\mathbf{a}_C = \sum_i F_i^{(e)}$$

Таким образом, мы получили теорему об изменении количества движения механической системы в дифференциальной форме: ***производная по времени от количества движения механической системы равна сумме действующих на систему внешних сил.***

Подчеркнуть отличие между формулировками теорем в случаях точки и системы.

Как и в случае материальной точки наряду с дифференциальной формой Теоремы может использоваться и интегральная формулировка: ***изменение количества движения системы равно сумме импульсов внешних сил***

$$\mathbf{Q}(t=\tau) - \mathbf{Q}(t=0) = \sum_i \int_0^\tau \mathbf{F}_i^{(e)} dt = \sum_i \mathbf{S}_i^{(e)}, \quad \mathbf{S}_i^{(e)} = \int_0^\tau \mathbf{F}_i^{(e)} dt.$$

• Закон сохранения количества движения

Предположим, что $\sum_i \mathbf{F}_i^{(e)} = 0$, тогда $d\mathbf{Q}/dt = 0$. Откуда следует, что $\mathbf{Q}=const$.

Т.е. если сумма всех внешних сил действующих на систему равна нулю (либо сумма сил действующих на материальную точку), то количество движения будет постоянно и по модулю и по направлению.

Аналогично может быть показано, что если в ноль обращается сумма проекций всех сил на какую-либо ось, то проекция количества движения на эту ось постоянна. Это и есть **закон сохранения количества движения**.

• Понятие момента количества движения материальной точки и теорема об изменении момента количества движения материальной точки

Под моментом количеством движения точки массы *m* будем понимать величину равную

$$\mathbf{l}_O = \mathbf{r} \times \mathbf{q} = \mathbf{r} \times m\mathbf{v}$$

где $\mathbf{q}$ и $\mathbf{v}$ – количество движения и скорость точки, соответственно.

Дифференцируя данное соотношение по времени получаем

$$\frac{d\mathbf{l}_O}{dt} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} \times m\mathbf{v} + \mathbf{r} \times \frac{dm\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{v} \times m\mathbf{v} + \mathbf{r} \times m\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{r} \times m\mathbf{a} = \mathbf{r} \times \sum_i \mathbf{F}_i = \sum_i \mathbf{M}_O(\mathbf{F}_i)$$

Данное соотношение выражает **теорему об изменении момента количества движения точки** относительно центра: ***производная по времени от момента количества движения точки, взятого относительно какого-нибудь центра, равна моменту действующей на точку силы относительно того же центра.***

Последнее полученное соотношение может быть спроектировано на произвольную ось Oz. В этом случае получаем

$$\frac{dl_z}{dt} = \sum_i M_z(\mathbf{F}_i)$$

Это равенство выражает **теорему моментов относительно оси**.

Из полученных соотношений следует, что если $\sum_i \mathbf{M}_O(\mathbf{F}_i) = 0$ то $\mathbf{l}_O = const$, т.е. ***если момент действующей силы относительно некоторого центра равен нулю, то момент количества движения точки относительно этого центра есть величина постоянная.***

Такой результат имеет место в практически важном случае движения под действием центральной силы.

При движении под действием центральной силы точка движется по плоской кривой с постоянной секторной скоростью, т.е. так, что радиус-вектор точки в любые равные промежутки времени отметает равные площади. Первая часть утверждения вытекает из постоянства направления вектора количества движения, вторая – из постоянства его модуля.

- ## Главный момент количества движения системы (кинетический момент системы)

Главным моментом количества движения или **кинетическим моментом системы** относительно данного центра O называется величина $\mathbf{L}_O$, равная геометрической сумме моментов количества движения всех точек системы относительно этого центра:

$$\mathbf{L}_O = \sum_k \mathbf{l}_O(m_k \boldsymbol{\upsilon}_k).$$

Аналогичным образом может быть определен и кинетический момент системы относительно координатных осей

$$L_z = \sum_k l_z(m_k \boldsymbol{\upsilon}_k)$$

Главный момент количества движения системы может рассматриваться как характеристика ее вращательного движения.

- ## Кинетический момент вращающегося тела

Рассмотрим тело вращающееся вокруг неподвижной оси и определим его кинетический момент относительно оси вращения

Скорость точки отстоящей от оси на расстояние h_k равна $\upsilon_k = \omega h_k$, следовательно, для этой точки $l_z(m_k \upsilon_k) = m_k \upsilon_k h_k = m_k h_k^2 \omega$, тогда для всего тела получаем

$$L_z = \sum_k l_z(m_k \boldsymbol{\upsilon}_k) = \sum_k m_k h_k^2 \omega = \omega \sum_k m_k h_k^2 = J_z \omega$$

Таким образом, ***кинетический момент вращающегося тела относительно оси вращения равен произведению момента инерции тела относительно этой оси на угловую скорость тела.***

• Теорема об изменении кинетического момента системы

Ранее была доказана теорема об изменении момента количества движения для отдельной точки механической системы. Применительно к отдельной точке механической системы эта теорема может быть записана в следующем

$$\frac{d\mathbf{l}_O(m_i\mathbf{v}_i)}{dt} = \mathbf{M}_O(\mathbf{F}_i^{(e)}) + \mathbf{M}_O(\mathbf{F}_i^{(i)}),$$

где $\mathbf{F}_i^{(e)}, \mathbf{F}_i^{(i)}$ - равнодействующие всех внешних и внутренних сил действующих на точку i.

Составляя такие уравнения для каждой точки системы, выполняя затем их суммирование и учитывая второе основное свойство системы внутренних сил получим

$$\frac{d\mathbf{L}_O}{dt} = \sum_k \mathbf{M}_O(\mathbf{F}_k^{(e)})$$

Данное соотношение выражает следующую **теорему моментов**: ***производная по времени от главного момента количества движения системы относительно некоторого неподвижного центра равна суме моментов всех внешних сил системы относительно того же центра.***

Как и в случае с материальной точкой полученная теорема может быть записана в виде проекций на какие-либо оси, например на ось z

$$\frac{dL_z}{dt} = \sum_k M_z(\mathbf{F}_k^{(e)})$$

Доказанной выше теоремой широко пользуются при изучении вращательного движения тел, в теории гироскопа и теории удара. Ее практическая ценность состоит в том, что аналогично теореме об изменении количества движения, она позволяет исключать из рассмотрения все наперед неизвестные внутренние силы, но уже при изучении вращательного движения системы.

• Закон сохранения кинетического момента

Предположим, что $\sum_k \mathbf{M}_O(\mathbf{F}_k^{(e)}) = 0$, тогда $\frac{d\mathbf{L}_O}{dt} = 0$. Откуда следует, что $\mathbf{L}_O = const$. Т.е. ***если сумма моментов относительно данного центра всех приложенных к системе внешних сил равна нулю, то главный момент количества движения системы относительно этого центра будет постоянен по величине и направлению.***

Предположим, что $\sum_k M_z(\mathbf{F}_k^{(e)}) = 0$, тогда $\frac{dL_z}{dt} = 0$. Откуда следует, что $L_z = const$. Т.е. ***если сумма моментов всех приложенных к системе внешних сил относительно какой-нибудь оси равна нулю, то главный момент количества движения системы относительно этой оси будет величиной постоянной.***

Случай вращающейся системы

Для вращающейся системы $L_z = J_z\omega$, поэтому если $\sum\limits_k M_z(\mathbf{F}_k^{(e)}) = 0$ получаем $J_z\omega = const$

1. если система неизменяема (АТТ), то $J_z = const$ и $\omega = const$, т.е. твердое тело вращается с постоянной угловой скоростью.
2. если система изменяема, то под действием внутренних сил ее точки могут приближаться к оси и J_z будет уменьшаться, а значит угловая скорость ω взрастать. И наоборот - J_z растет, а ω падает.

• Дифференциальное уравнение вращательного движения твердого тела

Рассмотри твердое тело вращающееся вокруг неподвижной оси и применим к нему доказанную ранее теорему моментов в проекции на ось вращения *z*

$$\frac{dL_z}{dt} = \sum_k M_z(\mathbf{F}_k^{(e)})$$

В дальнейшем величину $M_z = \sum\limits_k M_z(\mathbf{F}_k^{(e)})$ будем называть вращающим моментом.

Для вращающегося тела $L_z = J_z\omega$. Поскольку тело твердое, то величина J_z есть величина постоянная и подставляя все в первое соотношение получаем

$$J_z\frac{d\omega}{dt} = M_z \quad \text{èëè} \quad J_z\frac{d^2\varphi}{dt^2} = M_z.$$

Полученные соотношения представляют собой **дифференциальное уравнение вращательного движения твердого тела**. Из него следует, что ***произведение момента инерции тела относительно оси вращения на угловое ускорение равно вращающему моменту.***

$$J_z\varepsilon = M_z$$

Данное уравнение имеет такую же структуру как и дифференциальное уравнение поступательного движения. Сопоставление этих соотношений позволяет сделать вывод, что роль **массы** при вращательном движении играет **момент инерции тела**, а роль **внешних сил** – **моменты внешних сил**.

• Теорема моментов относительно центра масс системы

Можно показать, что, ***для осей, движущихся вместе с центром масс системы, теорема моментов относительно центра масс сохраняет тот же вид, что и относительно неподвижного центра.***

• Уравнения динамики плоскопараллельного движения

Как известно плоскопараллельное движение может быть представлено как **движение полюса плюс вращение плоской фигуры вокруг полюса**.

Полюс может быть выбран произвольно, поэтому в качестве полюса мы можем взять например центр масс точку *C*. Применяя теперь для плоской фигуры теорему об изменении центра масс получим уравнение следующего вида

$$M\mathbf{a}_C=\sum_k \mathbf{F}_k^{(e)}$$

или в проекции на координатные оси

$$Ma_{Cx}=\sum_k F_{kx}^{(e)},\quad Ma_{Cy}=\sum_k F_{ky}^{(e)}.$$

Решив эти дифференциальные уравнения можно получить законы изменения координат x_C и y_C, определяющих положение полюса.

Для подвижной системы координат связанной с центром масс теорема моментов, как было показано выше, может быть записана в следующем виде

$$\frac{d\mathbf{L}_C}{dt}=\sum_k \mathbf{M}_C(\mathbf{F}_k^{(e)})$$

или в проекции на ось вращения плоской фигуры *(перпендикулярную ее плоскости)*

$$\frac{dL_z}{dt}=\sum_k M_z(\mathbf{F}_k^{(e)})$$

Для вращающегося тела $L_z=J_z\omega$ и мы получаем $J_z\varepsilon=\sum\limits_k M_z(\mathbf{F}_k^{(e)})$. Полученное уравнение описывает вращение плоской фигуры вокруг полюса.

Таким образом полная система дифференциальных уравнений плоскопараллельного движения может быть записана в следующем виде

$$M\ddot{x}_C=\sum_k F_{kx}^{(e)},\quad M\ddot{y}_C=\sum_k F_{ky}^{(e)},\quad J_z\ddot{\varphi}=\sum_k M_z(\mathbf{F}_k^{(e)})$$

С помощью полученных уравнений можно по заданным силам определить закон движения тела или, зная закон движения тела, найти главный вектор и главный момент действующих сил.

Лекция 8
Принцип Даламбера
• Введение

Все рассмотренные ранее методы решения задач механики были основаны либо на уравнении Ньютона, либо на следствиях этого уравнения. Это позволяет нам говорить, что ***уравнения Ньютона лежат в основе изучаемой нами механики***. Однако такой путь изучения механического движения не является единственно возможным. В основу рассмотрения могут быть положены иные уравнения либо общие положения называемые **принципами механиками**, что позволяет говорить нам о наличии различных формулировок теоретической механики. Такое многообразие формулировок позволяет выбирать наиболее оптимальные подходы к решению конкретных задач. Одним из таких общих принципов механики является принцип Даламбера.

• Принцип Даламбера для материальной точки

Рассмотрим материальную точку массы m и обозначим равнодействующую всех активных сил действующих на эту точку как $\mathbf{F}$, а равнодействующую всех сил реакции (если точка является несвободной) $\mathbf{N}$. Под действием всех этих сил точка приобретет ускорение $\mathbf{a}$. Введем в рассмотрение величину

$$\mathbf{\Phi} = -m\mathbf{a}. \qquad (1)$$

Она имеет размерность силы, что позволяет определить ее как некоторую силу инерции. Модуль силы инерции равен произведению массы на ускорение, а направление противоположно направлению ускорения.

При таком определении силы инерции оказывается, что движение точки обладает следующим свойством: ***если в любой момент времени к активным силам и силам реакции присоединить силы инерции, то полученная система сил окажется уравновешенной***

$$\mathbf{F} + \mathbf{N} + \mathbf{\Phi} = 0 \qquad (2)$$

Это утверждение выражает **принцип Даламбера для материальной точки**.

Поскольку при изучении движения материальной точки любая система сил действующая на нее будет сходящейся, принцип Даламбера для материальной точки может быть сформулирован и в следующем виде: ***сумма активных сил приложенных к материальной точке, сил реакции связей наложенных на нее и сил инерции равна нулю.***

Нетрудно показать, что сформулированный выше принцип Даламбера эквивалентен уравнению Ньютона, действительно

$$\mathbf{F} + \mathbf{N} - m\mathbf{a} = 0, \Rightarrow \mathbf{F} + \mathbf{N} = m\mathbf{a}. \qquad (3)$$

• Принцип Даламбера для механической системы

Сформулированный ранее принцип Даламбера для материальной точки может быть естественным образом обобщен на систему материальных точек. Для этого выделим в системе произвольную точку с массой m_k и применим к этой точке сформулированный выше принцип даламбера

$$\mathbf{F}_k^e + \mathbf{F}_k^i + \mathbf{\Phi}_k = 0, \qquad (4)$$

где $\mathbf{F}_k^e$ и $\mathbf{F}_k^i$ - внешние (активные силы и силы реакции) и внутренние силы действующие на k-ую точку системы; $\mathbf{\Phi}_k = -m_k \mathbf{a}_k$ - сила инерции для k-ой точки.

Проведенные рассуждения могут повторены для каждой из точек механической системы. Это позволяет сделать вывод о том, что если каждая из точек системы под действием системы внешних и внутренних сил и сил инерции находится в равновесии, то и вся механическая система также неподвижна. Полученный результат и выражает принцип Даламбера для механической системы: ***если в любой момент времени к каждой из точек системы кроме действующих на нее внешних и внутренних сил добавить соответствующие силы инерции, то полученная система сил будет уравновешенной и к ней можно применять все уравнения статики.***

Система векторных уравнений вида (4) эквивалентна системе дифференциальных уравнений движения точек механической системы. Следовательно, из этих уравнений могут быть получены, например, все общие теоремы динамики. Такой вывод теорем динамики будет рассмотрен позже.

Значение принципа Даламбера состоит в том, что при его непосредственном применении к задачам динамики уравнения движения представляются в виде хорошо известных уравнений статики, что упрощает численные расчеты. Кроме того, в соединении с принципом возможных перемещений, который будет изучен позже, принцип Даламбера позволит получить еще один общий метод решения задач динамики – метод общего уравнения динамики.

Из статики известно, что геометрическая сумма сил находящихся в равновесии и сумма их моментов относительно любого центра равна 0.

$$\begin{cases} \sum\limits_k \left(\mathbf{F}_k^e + \mathbf{F}_k^i + \mathbf{\Phi}_k \right) = 0 \\ \sum\limits_k \left(\mathbf{m}_O(\mathbf{F}_k^e) + \mathbf{m}_O(\mathbf{F}_k^i) + \mathbf{m}_O(\mathbf{\Phi}_k) \right) = 0 \end{cases} \tag{5}$$

Вводя обозначения

$$\sum_k \mathbf{\Phi}_k = \mathbf{R}^u, \ \sum_k \mathbf{m}_O(\mathbf{\Phi}_k) = \mathbf{M}_O^u, \tag{6}$$

и учитывая, что сумма внутренних сил и моментов этих сил 0, получаем

$$\begin{cases} \sum\limits_k \mathbf{F}_k^e + \mathbf{R}^u = 0 \\ \sum\limits_k \mathbf{m}_O(\mathbf{F}_k^e) + \mathbf{M}_O^u = 0 \end{cases} \tag{7}$$

Величины $\mathbf{R}^u$ и $\mathbf{M}_O^u$ представляют собой ***главный вектор*** и ***главный момент относительно центра О системы сил инерции***.

Необходимо отметить, что уравнения (7) не содержат внутренних сил, что существенно упрощает их структуру.

- **Главный вектор и главный момент сил инерции**

Рассмотрим более подробно главный вектор и главный момент системы сил инерции относительно центра O.

$$\mathbf{R}^u = \sum_k \mathbf{\Phi}_k = -\sum_k m_k \mathbf{a}_k = -\sum_k m_k \frac{d^2\mathbf{r}_k}{dt^2} = -\sum_k \frac{d^2 m_k \mathbf{r}_k}{dt^2} = -\frac{d^2}{dt^2}\sum_k m_k \mathbf{r}_k =$$

$$= -\frac{d^2}{dt^2}\left(\sum_k m_k \frac{\sum_k m_k \mathbf{r}_k}{\sum_k m_k} \right) = -M\frac{d^2\mathbf{r}_C}{dt^2} = -M\mathbf{a}_C \qquad (8)$$

Т.о. ***главный вектор сил инерции механической системы равен произведению полной массы системы на ускорение центра масс и направлен противоположно этому ускорению.***

Если ускорение центра масс разложить на касательное и нормальное, то главный вектор сил инерции разложится на касательную и нормальную (центробежную) составляющие

$$\mathbf{R}^u_\tau = -M\mathbf{a}_{C\tau}, \quad \mathbf{R}^u_n = -M\mathbf{a}_{Cn} \qquad (9)$$

$$\mathbf{M}^u_O = \sum_k \mathbf{m}_O(\mathbf{\Phi}_k) = \sum_k \mathbf{r}_k \times \mathbf{\Phi}_k = -\sum_k \mathbf{r}_k \times m_k \mathbf{a}_k = -\sum_k \mathbf{r}_k \times m_k \frac{d\boldsymbol{\upsilon}_k}{dt} =$$

$$= -\sum_k \mathbf{r}_k \times \frac{d m_k \boldsymbol{\upsilon}_k}{dt} = -\sum_k \left(\frac{d(\mathbf{r}_k \times m_k \boldsymbol{\upsilon}_k)}{dt} - \frac{d\mathbf{r}_k}{dt} \times m_k \boldsymbol{\upsilon}_k \right) =$$

$$= -\sum_k \left(\frac{d(\mathbf{r}_k \times m_k \boldsymbol{\upsilon}_k)}{dt} - \frac{d\mathbf{r}_k}{dt} \times m_k \boldsymbol{\upsilon}_k \right) =$$

$$-\sum_k \left(\frac{d\mathbf{l}_{Ok}}{dt} - \boldsymbol{\upsilon}_k \times m_k \boldsymbol{\upsilon}_k \right) = -\frac{d}{dt}\sum_k \mathbf{l}_{Ok} = -\frac{d\mathbf{L}_O}{dt} \qquad (10)$$

или в проекции на ось z

$$M^u_z = -\frac{dL_z}{dt} \qquad (11)$$

Т.е. ***главный момент сил инерции механической системы относительно некоторого центра O или оси z равен взятой со знаком минус производной по времени от кинетического момента системы относительно того же центра или той же оси.***

Рассмотрим первое уравнение системы (7)

$$\sum_k \mathbf{F}^e_k + \mathbf{R}^u = 0 \Rightarrow \sum_k \mathbf{F}^e_k = -\mathbf{R}^u = -(-M\mathbf{a}_C) = M\mathbf{a}_C$$

Тем самым теорема о движении центра масс механической системы доказана, но доказана исходя из принципа Даламбера, а не уравнений Ньютона.

Рассмотрим второе уравнение системы (7)

$$\sum_k \mathbf{m}_O(\mathbf{F}^e_k) + \mathbf{M}^u_O = 0 \Rightarrow \sum_k \mathbf{m}_O(\mathbf{F}^e_k) = -\mathbf{M}^u_O = -\left(-\frac{d\mathbf{L}_O}{dt} \right) = \frac{d\mathbf{L}_O}{dt} \text{ Е}$$

Т.е. доказана и теорема об изменении кинетического момента. Аналогичным образом могут быть доказаны теоремы об изменении количества движения и изменении кинетической энергии системы.

- **Приведение сил инерции твердого тела**

Согласно теореме о приведении системы сил к произвольному центру произвольная система сил, в т.ч. и система сил инерции, может быть заменена главным вектором системы сил инерции $\mathbf{R}^u$ и парой сил с моментом равным главному моменту системы сил инерции относительно произвольного центра $\mathbf{M}_O^u$.

Рассмотрим теперь в качестве механической системы твердое тело.

1. Поступательное движение твердого тела.

При поступательном движении ТТ ускорения всех точек одинаковы и равны ускорению центра масс твердого тела $\mathbf{a}_k = \mathbf{a}_C$. Тогда силы инерции образуют систему параллельных сил $\mathbf{\Phi}_k = -m_k \mathbf{a}_k = -m_k \mathbf{a}_C$ аналогичных силам тяжести $\mathbf{P}_k = m_k \mathbf{g}$. Поэтому как и силы тяжести они имеют равнодействующую проходящую через центр масс твердого тела *C*.

Следовательно, ***при поступательном движении силы инерции твердого тела приводятся к равнодействующей, равной $\mathbf{R}^u = -M\mathbf{a}_C$ и проходящей через центр масс тела.***

2. Вращательное движение твердого тела.

Рассмотрим вращение твердого тела вокруг оси *Oz* перпендикулярной плоскости материальной симметрии тела *Oxy*. При приведении системы сил к центру *O* вследствие симметрии системы результирующая сила и пара сил будут лежать в плоскости симметрии. Поскольку для вращательного движения $L_z = J_{Oz}\omega$, для проекции на ось *Oz* главного вектор–момента сил инерции получаем

$$M_{Oz}^u = -\frac{dL_z}{dt} = -J_{Oz}\frac{d\omega}{dt} = -J_{Oz}\varepsilon$$

Следовательно, ***в рассматриваемом случае система сил инерции приводится в главному вектору сил инерции равному $\mathbf{R}^u = -M\mathbf{a}_C$ и приложенному в точке O и паре сил с моментом $M_{Oz}^u = -J_{Oz}\varepsilon$ лежащей в плоскости симметрии тела.***

3. Вращение вокруг оси, проходящей через центр масс тела

Если ось вращения проходит через центр масс, то очевидно, что центр масс неподвижен и $\mathbf{a}_C = 0 \quad (\mathbf{R}^u = -M\mathbf{a}_C = 0)$, следовательно в этом случае ***система сил инерции приводится только к одной паре сил с моментом $M_{Oz}^u = -J_{Oz}\varepsilon$ лежащей в плоскости симметрии тела.***

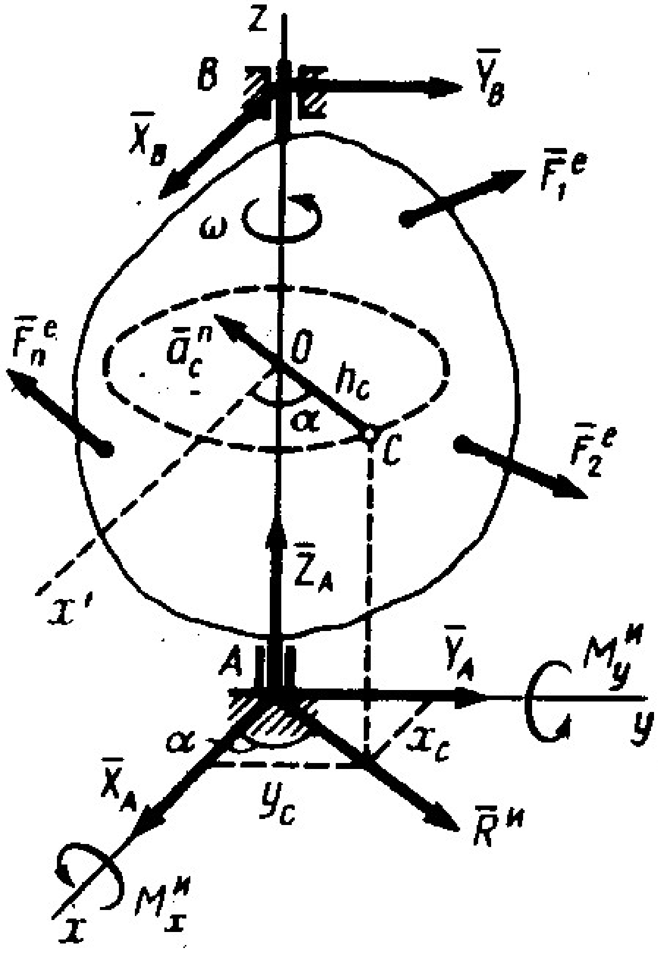
4. Плоскопараллельное движение твердого тела

Если тело имеет плоскость симметрии и движется параллельно этой плоскости, то очевидно что ***система сил инерции приводится в главному вектору сил инер-***

ции равному $\mathbf{R}^{u} = -M\mathbf{a}_C$ и приложенному в центре масс тела С и паре сил с моментом $M^{u}_{Cz} = -J_{Cz}\varepsilon$.

- **Динамические реакции, действующие на ось вращающегося тела**

Рассмотрим твердое тело, равномерно вращающееся с угловой скоростью ω вокруг оси закрепленной в подшипниках *A* и *B*. Систему координат *Axyz* жестко связана с телом. Согласно принципу Даламбера присоединим ко всем внешним активным силам действующим на тело и реакциям внешних связей (2-х подшипников) силы инерции. Получившаяся система сил является уравновешенной и для нее могут быть записаны уравнения статики.



$$\begin{cases} X_A + X_B + R_x^{(e)} + R_x^{(\grave{e})} = 0 \\ Y_A + Y_B + R_y^{(e)} + R_y^{(\grave{e})} = 0 \\ Z_A + R_z^{(e)} + R_z^{(\grave{e})} = 0 \\ -Y_B b + M_x^{(e)} + M_x^{(\grave{e})} = 0 \\ X_B b + M_y^{(e)} + M_y^{(\grave{e})} = 0 \end{cases} \quad , \qquad (12)$$

Здесь $M^{(e)}_{x(y)}$ è $M^{(\grave{e})}_{x(y)}$ - главный моменты системы внешних сил и сил инерции, соответственно, относительно осей *x* (*y*); $R^{(e)}_{x(y,z)}$ è $R^{(\grave{e})}_{x(y,z)}$ - проекции на ось *x* (*y*, *z*) главных векторов системы внешних сил и сил инерции, соответственно; X_A, Y_A, Z_A, X_B, Y_B - реакции подшипников; *AB*=*b*.

Последнее шестое уравнение системы $M_z^{(e)} + M_z^{(\grave{e})} = 0$ выполняется тождественно, поскольку при постоянной угловой скорости ε=0 и из теореме об изменении кинетического момента и определения главного момента системы сил инерции следует $M_z^{(e)} = 0, \quad M_z^{(\grave{e})} = 0$.

В силу постоянства угловой скорости можно сделать вывод, что центр масс имеет только центростремительное ускорение, которому отвечает центробежная сила инерции. Поэтому для проекций главного вектора систем сил инерции можно записать

$$R_x^{(\grave{e})} = m\omega^2 x_C, \quad R_y^{(\grave{e})} = m\omega^2 y_C, \quad R_z^{(\grave{e})} = 0. \qquad (13)$$

Аналогичным образом для произвольной *k*-ой точки можно записать

$$\Phi_{kx}^{(\grave{e})} = m_k\omega^2 x_k, \quad \Phi_{ky}^{(\grave{e})} = m_k\omega^2 y_k, \quad \Phi_{kz}^{(\grave{e})} = 0, \qquad (14)$$

тогда для моментов этих сил получаем

$$m_x(\boldsymbol{\Phi}_k^{(\grave{e})}) = -\Phi_{ky}^{(\grave{e})} z_k = -m_k \omega^2 y_k z_k, \quad m_y(\boldsymbol{\Phi}_k^{(\grave{e})}) = \Phi_{kx}^{(\grave{e})} z_k = m_k \omega^2 x_k y_k \qquad (15)$$

Такие выражения могут быть составлены для каждой из точек тела, сложив их и вынеся за скобки общие множители получим

$$M_x^{(\grave{e})} = -\omega^2 \sum_k m_k y_k z_k = -J_{yz}\omega^2, \quad M_y^{(\grave{e})} = \omega^2 \sum_k m_k x_k z_k = J_{xz}\omega^2, \qquad (16)$$

где $J_{yz} = \sum_k m_k y_k z_k, \quad J_{xz} = \sum_k m_k x_k z_k$ - соответствующие центробежные моменты инерции.

Т.о. система уравнений (12) может быть переписана в следующем виде

$$\begin{cases} X_A + X_B = -R_x^{(e)} - m\omega^2 x_C, \quad Y_A + Y_B = -R_y^{(e)} - m\omega^2 y_C, \quad Z_A = -R_z^{(e)} \\ Y_B b = M_x^{(e)} - J_{yz}\omega^2, \quad X_B b = -M_y^{(e)} - J_{xz}\omega^2 \end{cases} \qquad (17)$$

Система уравнением (17) и определяет ***динамические реакции,*** действующие на ось равномерно вращающегося тела, если осью вращения является ось z.

Статическими называются реакции определяемые уравнениями (17) при ω=0. Как видно из системы уравнений (17) динамические реакции могут быть существенно больше статических причем это зависит не только от ω, но от величин x_C, y_C, J_{yz}, J_{xz}, характеризующих распределение масс по отношению к оси вращения Oz.

• Динамическое уравновешивание

Из уравнений (17) видно, что динамические реакции будут равны статическим если

$$x_C = 0, \quad y_C = 0 \qquad (18)$$

$$J_{yz} = 0, \quad J_{xz} = 0 \qquad (19)$$

Сформулированные соотношения выражают условия ***динамической уравновешенности*** вращающегося тела при его вращении вокруг оси z.

Условие (18) означает, что центр масс должен лежать на оси вращения, а условие (19) означает, что ось вращения Oz должна быть **главной осью инерции** тела для начала координат.

Ось Oz для которой центробежные моменты инерции J_{yz}, J_{xz}, содержащие в своих индексах наименование этой оси, равны нулю, называется главной осью инерции тела для точки O. Если тело имеет ось симметрии , то эта ось является главной осью инерции тела для любой своей точки. Если тело имеет плоскость симметрии, то любая ось, перпендикулярная этой плоскости, будет главной осью инерции тела для точки O, в которой ось пересекает плоскость.

При одновременном выполнении условий (18) и (19) ось вращения будет **главной центральной осью инерции** тела.

Главные оси инерции, построенные для центра масс тела, называются главными центральными осями инерции тела. Можно доказать, что любое тело имеет, по крайней мере, три взаимно перпендикулярные главные центральные оси инерции.

Т.о. ***динамические реакции будут равны статическим, если ось вращения является одной из главных центральных осей инерции тела***. Этот вывод остается справедливым и при неравномерном вращении тела.

Можно также сделать вывод о том, что ***центробежные моменты инерции*** J_{yz} ***и*** J_{xz} ***характеризуют степень динамической неуравновешенности тела при его вращении вокруг оси z***.

Т.о. динамическое уравновешивание сводится к определению главных центральных осей инерции.

Теорема. ***Любую ось, проведенную в теле, можно сделать главной центральной осью инерции прибавлением к телу двух точечных масс.***

Пусть известны $x_C \neq 0$, $y_C \neq 0$, $J_{yz} \neq 0$, $J_{xz} \neq 0$. Прибавим к телу две массы m_1 и m_2 в точках (x_1, y_1, z_1) и (x_2, y_2, z_2).

Тогда если буду выполняться условия

$$mx_C + m_1x_1 + m_2x_2 = 0, \quad my_C + m_1y_1 + m_2y_2 = 0, \tag{20}$$

$$J_{xz} + m_1x_1z_1 + m_2x_2z_2 = 0, \quad J_{yz} + m_1y_1z_1 + m_2y_2z_2 = 0, \tag{21}$$

то для образованного твердого тела будет выполняться $x'_C = y'_C = J'_{xz} = J'_{yz} = 0$, т.е. ось z станет главной центральной осью инерции. Для удовлетворения уравнений (20) и (21) часть величин следует задать наперед. Так, например, можно задать m_1, m_2, z_1 и z_2 (но так чтобы $z_1 \neq z_2$) а оставшиеся величины могут быть определены из уравнений (20) и (21).

Такой метод уравновешивания вращающихся тел широко используется при уравновешивании коленчатых валов, кривошипов, спарников и т.п. При этом для окончательной балансировки используются специальные станки.