Учреждение образования
«Белорусский государственный технологический университет»

Конспект лекций по дисциплине «Теоретическая механика»

Для студентов I и II курсов заочного факультета специальностей:
1-46 01 02 «Технология деревообрабатывающих производств (сокращенный срок обучения)»

Лектор: доцент Грода Я.Г.

Минск, БГТУ
2014 г.

Лекция 1

Законы и основные понятия механики. Введение в статику

• Введение

Механика - наука о **механическом движении** и **взаимодействии** материальных тел.

Механическое движение – процесс изменения взаимного расположения материальных тел в пространстве.

Механическое взаимодействие – взаимодействие при котором тела изменяют характер своего движения либо происходит их деформация. **Сила** - мера взаимодействия тел либо частей одного и того же тела.

Основная задача механики. – определение положения и скорости тела в любой момент времени если они известны в некоторый начальный момент времени.

Историческая роль механики. Ее место в создании *научной картины мира*.

Разделы механики: **статика**, **кинематика**, **динамика**. Способы их изложения.

• Понятие раздела "Статика" и основные определения

Статика - общее учение о силах и условиях равновесия материальных тел, подверженных их действию. Задачи статики:

1. ***приведение заданной системы сил к простейшему виду;***
2. ***определение условий равновесия системы сил.***

Роль моделей в механики. Модель **материальной точки**. Модель **абсолютно твердого тела**. Связь этих моделей с реальным миром.

Сила как векторная величина (модуль, точка приложения, направление). Единицы измерения силы. Понятие линии действия силы.

Понятие **системы сил**. Виды систем сил: ***плоские, пространственные; сходящиеся, параллельные***.

Понятие свободного тела и **принцип освобождения от связей**.

Понятие **эквивалентных систем сил** (если одну системы сил заменить другой, а движение тела не изменится).

Понятие **уравновешенной системы сил** (под ее действием тело может находиться в покое).

Понятие **равнодействующей** системы сил (если система сил эквивалентна одной силе то эта сила называется р.) и **уравновеши-**

вающей силы (равна по модулю равнодействующей и направлена в противоположную сторону).

Внешние и **внутренние** силы.

- **Аксиомы статики**

1. ***Если на свободное тело действуют две силы, то оно находится в состоянии равновесия тогда и только тогда, когда F_1=-F_2. (модули сил равны и силы направлены в противоположные стороны)***
2. ***Действие системы сил на АТТ не изменится если к этой системе сил добавить или отнять уравновешенную систему сил.***

Следствия из аксиом.

1. *Сила приложенная к АТТ - скользящий вектор. (Данное следствии е может применяться только к АТТ, пример со стержнем (сжатие, растяжение, равновесие)).*

- **Связи и их реакции**

Свободным телом называется такое тело, которое может перемещаться в пространстве в произвольном направлении.

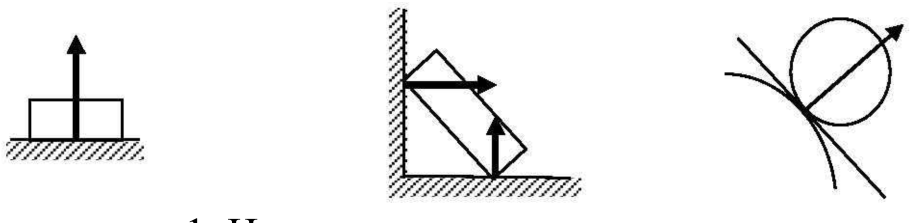
Связями называются ограничения любого вида наложенные на перемещения тела в пространстве.

Реакцией связи называется сила, с которой связь действует на данное тело.

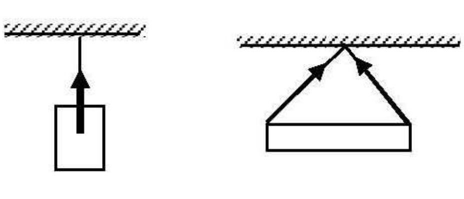
Реакция связи направлена вдоль того направления вдоль которого связь ограничивает возможность движения тела.

Принцип освобождения от связей: ***несвободное тело можно считать свободным, если все наложенные на него связи заменить их реакциями***.

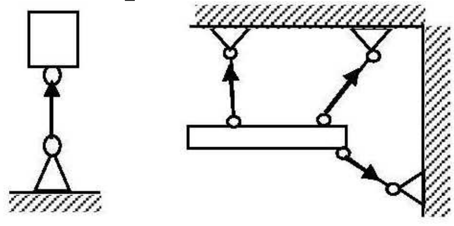
Основные виды связей.



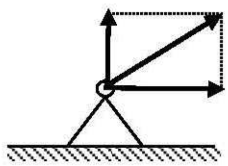
1. Нормальная реакция опоры



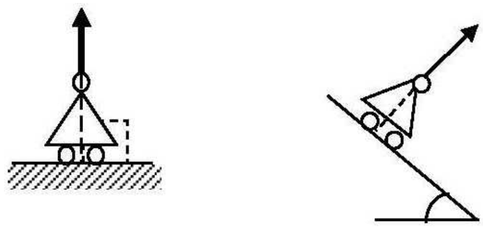
2. Натяжение нити



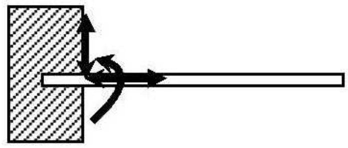
3. Реакция тонкого стержня



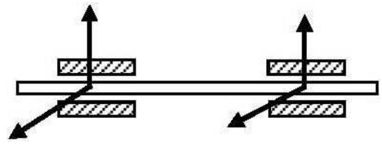
4. Реакция неподвижного шарнира



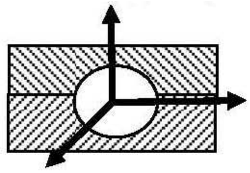
5. Реакция подвижного шарнира



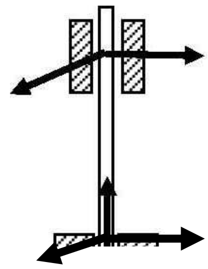
6. Реакции жесткой заделки балки



7. Реакции цилиндрического подшипника



8. Реакции сферического подшипника



9. Реакции подпятника

- **Равновесие системы сходящихся сил**

Если линии действия всех сил системы пересекаются в одной точке, то такая система сил называется **сходящейся**.

Главный вектор системы сил - векторная суммы всех сил системы. Различие понятий главного вектора и равнодействующей. Равнодействующая системы сходящихся сил (равна сумме сил и приложена в точке пересечения линий этих сил).

Условие равновесия сходящейся системы сил – главный вектор (равнодействующая) равен нулю.

✓ Геометрическая интерпретация условия равновесия: силовой многоугольник замкнут.

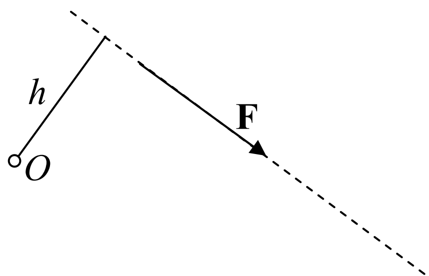
✓ Аналитическая: сумма проекций на каждую ось 0.

Теорема о трех силах – если на твердое тело действуют 3 силы и тело в равновесии, то силы сходящиеся.

- **Алгебраический момент силы относительно точки**

Алгебраическим моментом силы **F** относительно точки некоторой точки *O* называется взятое **с соответствующим знаком** произведение модуля силы на ее **плечо**.

$M_O(\mathbf{F}) = \pm Fh$



Плечо силы – длина перпендикуляра (кратчайшее расстояние) опущенного из точки *O* на **линию действия** силы.

Правило выбора знаков: если под действием силы **F** механическая система стремится повернуться относительно точки *O* против часовой стрелки, то момент считается положительным, если по часовой - отрицательным.

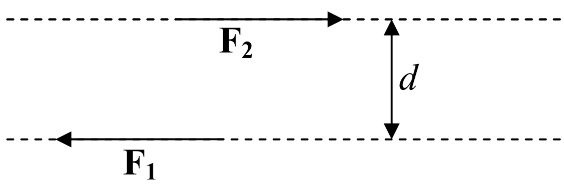
Единицей измерения момента является 1 ньютон-на-метр.

Момент силы относительно некоторой точки **равен 0** если эта **точка лежит на линии действия силы**.

Теорема Вариньона. Момент равнодействующей равен сумме моментов составляющих (момент суммы сил равен сумме моментов этих сил).

• Пара сил. Момент пары

Парой сил называется система двух равных по величине сил действующих вдоль параллельных прямых в противоположные стороны.



Плоскость, проходящая через линии действия сил образующих пару, называется **плоскостью пары**. **Плечом пары** *d* называется расстояние между линиями действия сил пары. **Алгебраический момент пары** равен взятому с соответствующим знаком произведению модуля силы входящей в пару на плечо пары, при этом правило выбора знаков совпадает с аналогичным правилом для момента силы относительно точки.

Теорема. Момент пары равен сумме моментов сил пары относительно любого центра.

Следствия теоремы: пары имеющие одинаковые моменты являются **эквивалентными**.

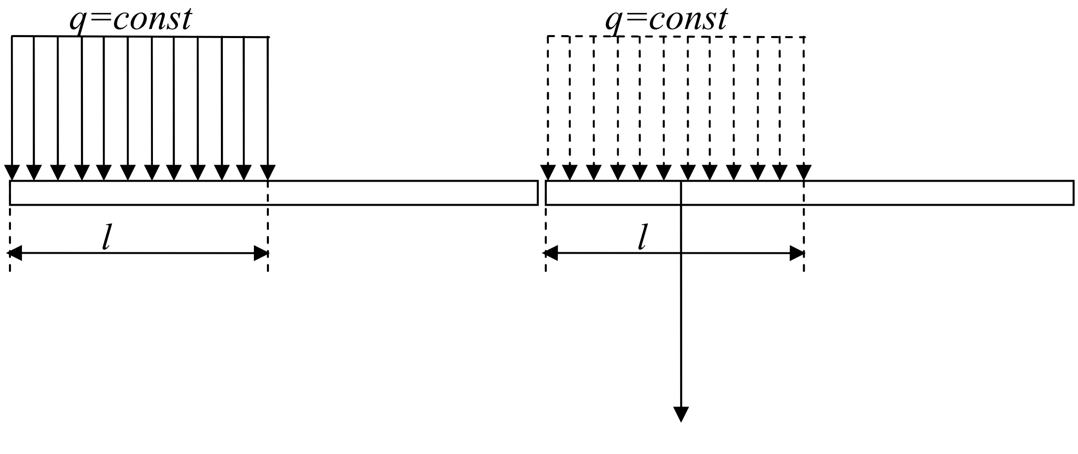
• Распределенная нагрузка

Нагрузка приложенная к некоторому **участку** механической системы называется **распределенной нагрузкой**.

Плоская система распределенных сил характеризуется ее и**нтенсивностью** *q*, т.е. значением силы приходящейся на единицу длины нагруженного участка ([*q*]=Н/м).

При решении задач статики распределенная нагрузка может быть заменена ее равнодействующей. Рассмотрим определение последней на примере **равномерно** и **линейно распределенной нагрузки**

1. Равномерно распределенная нагрузка

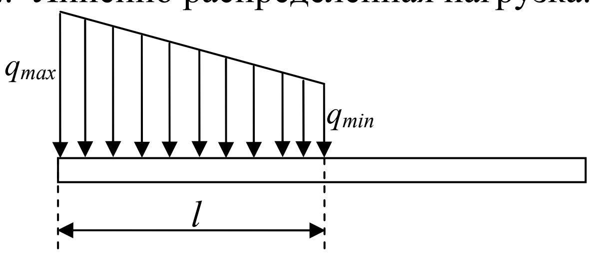


$$Q=\int_0^l q(x)dx=q\int_0^l dx=ql \qquad\qquad \boldsymbol{Q}$$

$$m(Q)=\int_0^l q(x)xdx=q\int_0^l xdx=\frac{ql^2}{2}=Q\frac{l}{2}$$

Т.о. можно считать, что равнодействующая равномерно распределенной нагрузки приложена в середине участка распределения.

2. Линейно распределенная нагрузка.



$$q(x)=q_{\max}-\frac{q_{\max}-q_{\min}}{l}x$$

$$Q=\int_0^l q(x)dx=\int_0^l\left(q_{\max}-\frac{\Delta q}{l}x\right)dx=q_{\max}l-\frac{\Delta q}{2}l=\frac{q_{\max}+q_{\min}}{2}l$$

$$m(Q)=\int_0^l q(x)xdx=\int_0^l\left(q_{\max}-\frac{\Delta q}{l}x\right)xdx=\frac{q_{\max}}{2}l^2-\frac{\Delta q}{3}l^2=Q\frac{l}{3}+\frac{q_{\min}}{6}l^2$$

Если $q_{\min}$=0 получаем

$$Q=\frac{q_{\max}}{2}l,\; m(Q)=Q\frac{l}{3}$$

Т.о. если нагрузка распределена "по треугольнику" то равнодействующая приложена на расстоянии ⅓l от точки приложения максимальной нагрузки.

- ## Условие равновесия произвольной плоской системы сил

Поскольку произвольная плоская система сил приводится к главному вектору и главному моменту, то очевидно, что для равновесия механической систему необходимо потребовать обращение в ноль двух этих величин.

В координатной форме условия равновесия принимает следующий вид

$$\sum_i F_{ix}=0,\quad \sum_i F_{iy}=0,\quad \sum_i M_O(\mathbf{F}_i)=0$$

Данная форма условий равновесия является основной. Помимо этой формы условия равновесия могут быть записаны в следующей форме

- ✓ $\sum_i F_{ix}=0,\quad \sum_i M_A(\mathbf{F}_i)=0,\quad \sum_i M_B(\mathbf{F}_i)=0$

  прямая *AB* не перпендикулярна оси *x*
- ✓ $\sum_i M_A(\mathbf{F}_i)=0,\quad \sum_i M_B(\mathbf{F}_i)=0,\quad \sum_i M_C(\mathbf{F}_i)=0$

  точки *A, B* и *C* не лежат на одной прямой

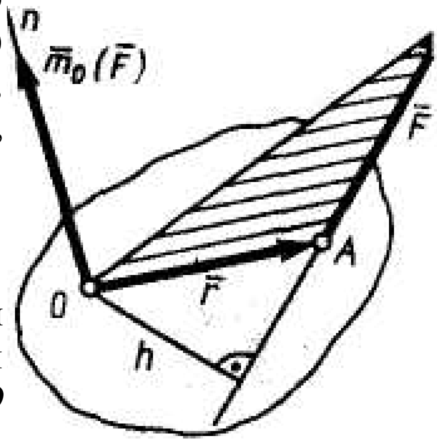
- ## Случай плоской системы параллельных сил.

✓ $\sum_i F_{ix} = 0, \quad \sum_i M_0(\mathbf{F}_i) = 0$ **ось *x* параллельна силам**

✓ $\sum_i M_A(\mathbf{F}_i) = 0, \quad \sum_i M_B(\mathbf{F}_i) = 0$ **прямая *AB* не параллельна силам**

• Вектор-момент силы относительно точки и вектор-момент пары сил.

Вектор – моментом силы **F** относительно центра *O* называется векторная величина $\mathbf{m}_O(\mathbf{F})$ равная векторному произведению радиус-вектора **r**, проведенного из центра *O* в точку приложения силы, на саму силу.



$$\mathbf{m}_O(\mathbf{F}) = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$$

Отметим следующие свойства момента силы: 1) момент силы относительно центра не изменяется при переносе точки приложения силы вдоль ее линии действия; 2) момент силы относительно центра *O* равен нулю или когда сила равна нулю, или когда линия действия силы проходит через центр *O* (плечо равно нулю).

Нетрудно видеть, что модуль вектор–момента силы относительно точки с точностью до знака совпадает с алгебраическим моментом силы относительно той же точки. Причины использования алгебраического момента для плоских задач.

Теорема Вариньона для вектор–момента оказывается очевидно справедливой и вытекает напрямую из определения понятия вектор – момента и свойств операции векторного произведения.

Аналогичным образом может быть определено понятие вектор–момента пары сил называется как вектора т, модуль которого равен произведению модуля одной из сил пары на ее плечо и который направлен перпендикулярно плоскости действия пары в ту сторону, откуда пара видна стремящейся повернуть тело против хода часовой стрелки. Снова можно отметить, что модуль и этого вектор–момента с точностью до знака совпадает с алгебраическим моментом.

• Момент силы относительно оси.

Проекция вектора $\mathbf{m}_O(\mathbf{F})$, т. е. момента силы **F** относительно центра *O*, на какую-нибудь ось *z*, проходящую через этот центр, называется **моментом силы F относительно оси** *z*, т.е.

$$m_z(\mathbf{F}) = m_O(\mathbf{F})\cos\gamma$$

где $m_z(\mathbf{F})$ — момент силы **F** относительно оси *z*; γ — угол между вектором $\mathbf{m}_O(\mathbf{F})$ и осью *z*.

Из определения следует, что $m_z(\mathbf{F})$, как проекция вектора на ось, является величиной алгебраической, т.е. имеет знак. При этом момент силы относительно оси будет иметь знак плюс, когда с положительного конца оси поворот, который стремится совершить сила **F**, виден происходящим против хода часовой стрелки, и знак минус — когда по ходу часовой стрелки.

Момент силы относительно оси может быть определен также следующим образом: момент силы $\boldsymbol{F}$ относительно оси z равен алгебраическому моменту проекции этой силы на плоскость, перпендикулярную оси z, взятому относительно точки O_1 пересечения оси с этой плоскостью.

Второе определение фактически дает метод вычисления момента силы относительно оси. Также можно отметить, что **момент силы относительно оси равен нулю** если

1. сила параллельна оси
2. линия действия силы пересекает ось.

Оба варианта могут быть соединены в один: **сила и ось лежат в одной плоскости**.

Теорема Вариньона о моменте равнодействующей справедлива и для моментов относительно любой оси. Теоремой особенно удобно пользоваться для нахождения моментов силы относительно координатных осей, разлагая силу на составляющие, параллельные осям или их пересекающие.

• Условие равновесия произвольной системы сил

Покажем, что для равновесия любой системы сил необходимо и достаточно, чтобы главный вектор этой системы сил и ее главный момент относительно любого центра были равны нулю, т. е. чтобы выполнялись условия

$$\mathbf{R} = 0, \quad \mathbf{M}_O = 0$$

где O — любой центр.

Сформулированные выше условия являются необходимыми, так как если какое-нибудь из них не выполняется, то система действующих на тело сил приводится или к равнодействующей (когда $\mathbf{R} \neq 0$), или к паре сил (когда $\mathbf{M}_O \neq 0$) и, следовательно, не является уравновешенной. Одновременно эти условия являются и достаточными, потому что при $\mathbf{R}=0$ система сил может приводиться только к паре с моментом $\mathbf{M}_O$, а так как $\mathbf{M}_O=0$, то имеет место равновесие.

Лекция 2
Кинематика точки и простейших движений твердого тела

• Кинематика - геометрия движения

Кинематика – раздел механики в котором изучается движение без учета причин это движение вызвавших. Место кинематики среди иных разделов механики.

Понятие ***системы отсчета***. Система отсчета = тело отсчета + система координат + время.

Пространство и время кинематики. Абсолютность времени и однородность пространства. Границы применимости классической механики.

Основная задача кинематики: зная закон движения установить методы определения кинематических характеристик этого движения.

Закон движения – зависимость, определяющая положение тела в пространстве в любой момент времени.

Траектория – линия вдоль которой движется точка в пространстве. Различие между траекторией и законом движения.

• Способы задания движения точки

1. *Векторный способ задания*. Положение точки задается радиус-вектором r. Его годограф определяет траекторию движения. Следует понимать, что от времени зависят координаты радиус-вектора. Такой способ описания хорош при выводе общих соотношений кинематики.
2. *Координатный способ задания*. Задан закон изменения со временем каждой из координат. Например $x=f_1(t)$, $y=f_2(t)$, $z=f_3(t)$. Вместо декартовой системы координат может использоваться любая другая.

Связь между векторным и координатным способами задания движения определяется соотношением

$$\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}$$

3. *Естественный способ задания*. Необходимо знать траекторию, на которой выбрать точку и определить положительное и отрицательное удаление от нее измеряемое вдоль траектории. Это удаление и есть естественная координата s. Закон движения имеет форму $s=f(t)$.

• Вектор скорости точки

Понятие средней скорости как отношения вектора перемещения ко времени за которое оно произошло.

Предельный переход от средней скорости к мгновенной.

$$\boldsymbol{\upsilon}(t) = \frac{d\mathbf{r}(t)}{dt}$$

Направление вектора скорости: касательная есть предельное представление секущей, являющейся вектором перемещения. Подчеркнуть однозначность взаимного положения траектории и вектора скорости.

• Вектор ускорения точки

Понятие ускорения точки, как скорости изменения скорости.

Понятие среднего ускорения и предельный переход к мгновенному ускорению.

$$\mathbf{a}(t) = \frac{d\boldsymbol{\upsilon}(t)}{dt} = \frac{d^2\mathbf{r}(t)}{dt^2}$$

Две причины наличия ускорения при движении точки: изменение величины скорости и изменение ее направления.

Подчеркнуть невозможность столь однозначного определения направления вектора ускорения по сравнению с вектором скорости.

• Скорость и ускорение точки при координатном способе задания движения

Как известно, $\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}$, причем единичные орты являются векторами постояными. Поэтому для вектора скорости получаем

$\boldsymbol{\upsilon}(t) = \dot{x}(t)\mathbf{i} + \dot{y}(t)\mathbf{j} + \dot{z}(t)\mathbf{k}$

С другой стороны для вектора скорости, как и для любого вектора можем записать

$\boldsymbol{\upsilon}(t) = \upsilon_x(t)\mathbf{i} + \upsilon_y(t)\mathbf{j} + \upsilon_z(t)\mathbf{k}$.

Сопоставив соотношения получаем

$\upsilon_x(t) = \dot{x}(t), \quad \upsilon_y(t) = \dot{y}(t), \quad \upsilon_z(t) = \dot{z}(t)$

Модуль скорости и направляющее косинусы определяются как

$$\upsilon = \sqrt{\upsilon_x^2 + \upsilon_y^2 + \upsilon_z^2}, \quad \cos\alpha = \frac{\upsilon_x}{\upsilon}, \quad \cos\beta = \frac{\upsilon_y}{\upsilon}, \quad \cos\gamma = \frac{\upsilon_z}{\upsilon}$$

$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$

Полностью аналогичные рассуждения могут быть проделаны и для вектора ускорения

$a_x(t) = \ddot{x}(t), \quad a_y(t) = \ddot{y}(t), \quad a_z(t) = \ddot{z}(t)$

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}, \quad \cos\alpha = \frac{a_x}{a}, \quad \cos\beta = \frac{a_y}{a}, \quad \cos\gamma = \frac{a_z}{a}$$

• Оси естественного трехгранника

При описании движения точки естественным образом значения векторов ***a*** и $\boldsymbol{\upsilon}$ определяются проекциями не на оси системы отсчета *Oxyz*, а на подвижные оси $M\tau nb$ связанные с самой точкой *M* и движущиеся вместе с нею. Эта тройка осей называется ***естественным трехгранником*** и строится следующим образом

1. Ось $M\tau$ направлена по касательной к траектории в сторону положительного отсчета криволинейной координаты *s*.
2. Ось *Mn* – по главной нормаль к траектории в сторону вогнутости траектории (главная нормаль – прямая перпендикулярная к касательной и лежащая в соприкасающейся плоскости).

3. Ось Mb называется бинормалью и может быть определенная вектором $\mathbf{b} = \boldsymbol{\tau} \times \mathbf{n}$, где $\boldsymbol{\tau}$ и $\mathbf{n}$ – единичные вектора орты на осях $M\tau$ и Mn.

Нетрудно видеть, что построенная таким образом система координат является прямоугольной декартовой, однако в отличии от неподвижных осей $Oxyz$ эта система отсчета движется вместе с точкой при ее движении вдоль траектории.

Рассмотри проекции векторов скорости и ускорения на оси естественного трехгранника.

Ранее было установлено, что скорость точки направлена по касательной к траектории. Это позволяет утверждать что

$$\upsilon_n = \upsilon_b = 0, \quad \upsilon_\tau = \pm\upsilon,$$

Следовательно υ_τ или совпадает с модулем скорости или отличается от него только знаком. В дальнийшем условимся обозначать υ_τ опуская индекс τ как υ и назовем его ***алгебраическим значением скорости***.

Определим алгебраическое значение скорости. За время Δt точка пройдем по траектории путь Δs. Тогда средняя скорость движения точки

$$\upsilon_{cp} = \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

Соответственно мгновенная скорость есть предел средней при $\Delta t \to 0$

$$\upsilon = \lim_{\Delta t \to 0} \upsilon_{cp} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{ds}{dt} = \dot{s}$$

Т.о. ***алгебраическое значение скорости точки в данный момент времени равно первой производной от криволинейной координаты этой точки по времени.***

• Касательное и нормальное ускорения точки

Ранее было установлено, что вектор ускорения лежит в соприкасающейся плоскости. Это позволяет утверждать, что в любой момент времени $a_b = 0$. Определим две оставшиеся проекции a_n и a_τ - нормальное и тангенциальное (касательное) ускорения .

$$a_\tau = \frac{(d\boldsymbol{\upsilon})_\tau}{dt}, \quad a_n = \frac{(d\boldsymbol{\upsilon})_n}{dt}$$

Проведя соответствующие вычисления получим

$$a_\tau = \frac{d\upsilon}{dt}, \quad a_n = \frac{\upsilon^2}{\rho}$$

где ρ – ***радиус кривизны траектории*** в точке M.

Радиус кривизны кривой в некоторой точке это радиус окружности дуга которой совпадает с кривой в окрестности данной точки.

Т.о. окончательно для нормального и тангенциального ускорений получаем следующие соотношения

Полное ускорение определяется геометрической суммой векторов $\boldsymbol{a}_\tau$ и $\boldsymbol{a}_n$. Поскольку оси $M\tau$ и Mn ортогональны для модуля полного ускорения можно записать следующее выражение

$$a = \sqrt{(a_\tau)^2 + (a_n)^2}\,.$$

Для выяснения механической природы нормальной и тангенциальной компонент вектора ускорения рассмотрим прямолинейное движение и равномерное криволинейное движение.

При прямолинейном движении направление скорости не изменяется и отличное от нуля ускорение может быть обеспечено только изменением модуля скорости. В то же время движение по прямой можно считать движением по дуге окружности бесконечно большого радиуса, а значит $\rho\to\infty$, $a_n = 0$ и $a = a_\tau$. Это позволяет сделать вывод, что т***ангенциальное (касательное) ускорение характеризует изменение скорости по величине.***

При равномерном движении $\upsilon = const$, $a_\tau = 0$ и $a = a_n$. Ускорение в этом случае появляется только за счет изменения скорости по направлению. Значит, ***нормальное ускорение характеризует изменение скорости по направлению.***

• Задачи кинематики твердого тела. Виды его движения

Абсолютно твердым телом (в дальнейшем, ***твердым телом***) называется такая механическая система при движение которой расстояние между любыми двумя точками в процессе движения остается постоянным. совокупность Пусть кривая *AB* – траектория движения точки *M* при ее движении в пространстве.

Задачи кинематики твердого тела

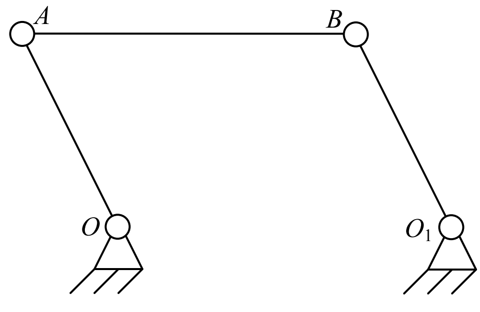
1. Задание движения и определение кинематических характеристик движения тела в целом;

2. Определение движения кинематических характеристик движения отдельных точек тела.

Поскольку движение твердого тела гораздо разнообразнее по сравнения с движением материальной точки изучение кинематики его движения мы начнем с рассмотрения двух простейших типов его движения (простейших движений) – ***поступательного движения*** и ***вращения твердого тела вокруг неподвижной оси***.

• Поступательное движение твердого тела.

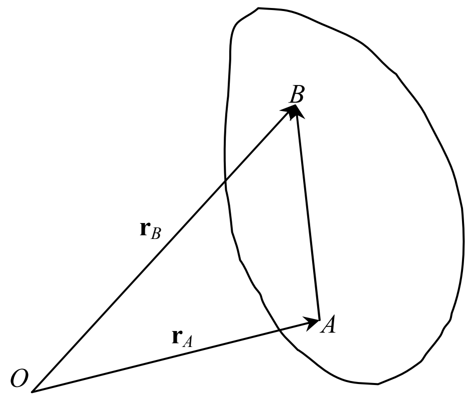
Поступательным называется такое движение твердого тела при котором любая прямая проведенная в нем остается при движении параллельной своему начальному положению.



Поступательное движение следует отличать от *прямолинейного*! При поступательном движении траектории отдельных точек могут быть и кривыми линиями. Примером не прямолинейного, но поступательного движения может служить движение спарника.

Теорема о поступательном движении. При поступательном движении твердого тела все его точки описывают одинаковые траектории и имеют в каждый момент времени одинаковые (по модулю и направлению) скорости и ускорения.

Доказательство. Есть две точки твердого тела A и B, их положение задается радиус-векторами $\mathbf{r}_A$ и $\mathbf{r}_B$, соответственно. Тогда можно записать, что $\mathbf{r}_B=\mathbf{r}_A+\mathbf{AB}$. При этом при движении вектор $\mathbf{AB}$ остается постоянным поскольку его модуль не изменяется т.к. тело является абсолютно твердым, а направление постоянно т.к. движение является поступательным. Следовательно траектория точки B может быть получена из траектории точки A смещением на вектор $\mathbf{AB}$.



Для нахождения скорости продифференцируем это соотношение с учетом того, что $\mathbf{AB}=\mathbf{const}$, и получим $\boldsymbol{\upsilon}_A=\boldsymbol{\upsilon}_B$, аналогично этому вторая производная даст $\boldsymbol{a}_A=\boldsymbol{a}_B$. Т.к. точки были выбраны произвольно, то это справедливо для любой точки твердого тела.

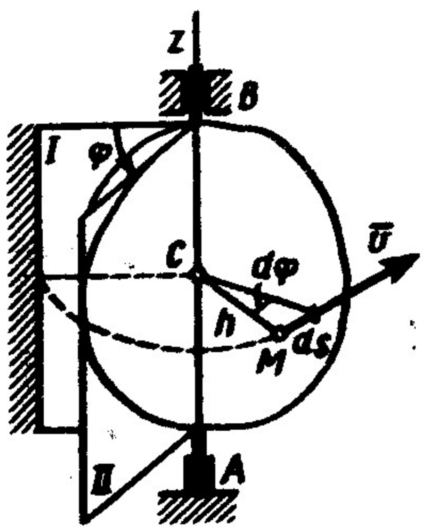
Следствие теоремы: поступательное движение твердого тела определяется движением любой его точки, при этом вектора скорости и ускорения можно изображать приложенными так же в любой точке тела.

Понятие скорости и ускорения движения твердого имеет смысл ***только*** при поступательном движении. В любом другом случае можно говорить ***только*** о скорости и ускорении движения точки твердого тела.

- **Вращательное движение ТТ вокруг неподвижной оси. Угловая скорость и угловое ускорение**

Вращательным называется такое движение твердого тела при котором какие-нибудь две его точки (или неизменно с ним связанные) остаются неподвижными. Прямая, проходящая через две эти точки называется ***осью вращения***.

Для описания вращения твердого тела рассмотрим две полуплоскости. Одну неподвижную, а вторую жестко связанную с телом. При вращении тела угол между этими полуплоскостями φ, называемый углом поворота твердого тела, будет изменяться. Зависимость угла поворота от времени $\varphi=\varphi(t)$ позволяет определять положение твердого тела в произвольный момент времени и является ***законом вращательного движения твердого тела вокруг неподвижной оси***.



Угол повороты измеряется в радианах!

Основными кинематическими характеристиками вращательного движения являются угловая скорость ω и угловое ускорение ε. Модуль угловой скорости определяется первой производной от угла поворота φ

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} = \dot{\varphi},$$

а ее направление правилом правого винта. ***Угловая скорость всегда направлена по оси вращения.***

Смысл угловой скорости – на сколько радиан тело повернется за 1 секунду. Единицей ее измерения является рад/с.

Иногда угловая скорость задается в числе оборотов в минуту n. Пересчет в обычные единицы измерения осуществляется следующим образом

$$\omega = \frac{2\pi n}{60} = \frac{\pi n}{30}$$

Аналогичным образом может быть определено и угловое ускорение

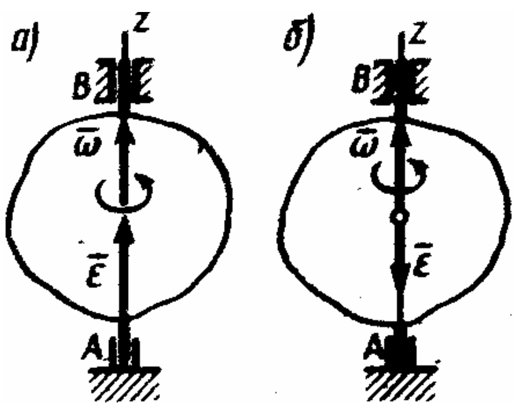
$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\omega}{dt^2} = \dot{\omega} = \ddot{\varphi}$$

Смысл углового ускорения – на сколько радиан в секунду изменится угловая скорость тела за 1 секунду. Единицей ее измерения является рад/с^2.

Как и угловая скорость, угловое ускорение направлено по оси вращения. При этом

$$\acute{\mathbf{r}} = \frac{d\acute{r}}{dt}$$

Т.е. направление угловой скорости и ускорения совпадают, если тело вращается ускорено, и вектора направлены в противоположные стороны, если тело замедляется.



- ## Скорости и ускорения точек вращающегося тела

Скорости точек. Рассмотрим точку твердого тела M на расстоянии h от оси вращения. Эта точка движется по окружности радиуса h. За время dt происходит элементарный поворот тела на угол $d\varphi$, а точка при этом совершает вдоль своей траектории элементарное перемещение $ds = hd\varphi$. Отсюда скорость точки

$$\upsilon = \frac{ds}{dt} = h\frac{d\varphi}{dt} = h\omega.$$

В отличии от угловой скорости эту скорость называют линейной или окружной скоростью точки M.

Ускорения точки. Для определения ускорения точки твердого тела при его вращательном движении воспользуемся определениями нормального и тангенциального ускорений, учтя, что в нашем случае радиус кривизны равен h.

$$a_n = \frac{\upsilon^2}{h} = \frac{(h\omega)^2}{h} = h\omega^2 \quad a_\tau = \frac{d\upsilon}{dt} = \frac{d(h\omega)}{dt} = h\frac{d\omega}{dt} = h\varepsilon$$

Полное ускорение точки в этом случае

$$a = \sqrt{a_n^2 + a_\tau^2} = h\sqrt{\omega^4 + \varepsilon^2}$$

Как и скорость ускорения точки называют линейными.

Линейные скорость и ускорения - кинематические характеристики движения точки твердого тела, а угловые скорость и ускорение - кинематические характеристики движения всего твердого тела.

Если учесть, что угловые скорость и ускорение это векторные величины, то для линейных скорости и ускорения могут быть записаны следующие выражения

$$\boldsymbol{\upsilon} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$$
$$\mathbf{a} = \boldsymbol{\varepsilon} \times \mathbf{r} + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\upsilon}$$

Лекция 3.

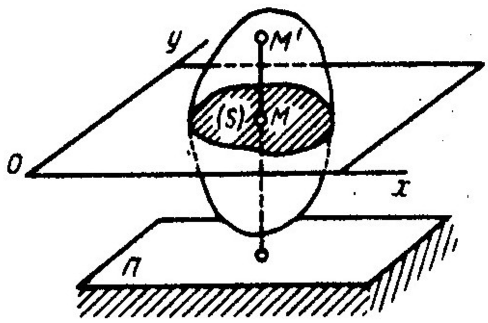
Плоскопараллельное движение твердого тела. Расчет скоростей точек тела.

• Понятие плоскопараллельного движения

Плоскопараллельным (или плоским) называется такое движение твердого тела, при котором все его точки перемещаются параллельно некоторой фиксированной плоскости.

Плоское движение совершают многие части механизмов и машин, например катящееся колесо на прямолинейном участке пути, шатун в кривошипно-ползунном механизме и др. Частным случаем плоскопараллельного движения является вращательное движение твердого тела вокруг неподвижной оси.

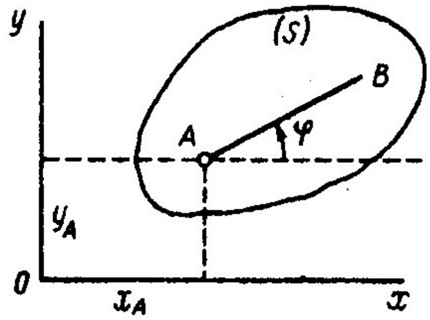
Рассмотрим сечение *S* тела какой-нибудь плоскостью *Oxy*, параллельной выделенной плоскости. При плоскопараллельном движении все точки тела, лежащие на прямой *MM'*, перпендикулярной сечению *S*, движутся тождественно.



Отсюда заключаем, что для изучения движения всего тела достаточно изучить, как движется в плоскости *Oxy* сечение *S* этого тела или некоторая плоская фигура *S*. Поэтому в дальнейшем вместо плоского движения тела будем рассматривать движение плоской фигуры *S* в ее плоскости, т.е. в плоскости *Oxy*.

• Уравнения плоскопаралельного движения твердого тела

Положение фигуры *S* в плоскости *Oxy* определяется положением какого-нибудь проведенного на этой фигуре отрезка *AB*. В свою очередь положение отрезка *AB* можно определить, зная координаты x_A, y_A точки *A* и угол φ, который отрезок *AB* образует с осью *x*. Точку *A* ***выбранную для определения положения фигуры*** *S*, ***будем в*** дальнейшем ***называть полюсом***.



При движении фигуры величины x_A, y_A и φ будут изменяться. Чтобы знать закон движения, т. е. положение фигуры в плоскости *Oxy* в любой момент времени, надо знать зависимости

$$x_A = x_A(t), \quad y_A = y_A(t), \quad \varphi = \varphi(t).$$

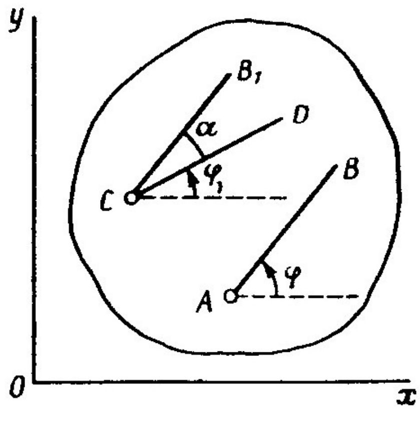
Данные уравнения, определяющие закон происходящего движения, называются ***уравнениями движения плоской фигуры в ее плоскости***. Они же являются ***уравнениями плоскопараллельного движения твердого тела***.

Первые два из уравнений плоского движения определяют то движение, которое фигура совершала бы при φ=*const*; это, очевидно, будет поступательное движение, при котором все точки фигуры движутся так же, как полюс *A*. Третье уравнение определяет движение, которое фигура совершала бы при x_A=*const* и y_A=*const*, т. е. когда полюс *A* неподвижен; это будет вращение фигуры вокруг полюса *A*. Отсюда можно заключить, что ***в общем случае движение плоской фигуры в ее плоскости может рассматриваться как слагающееся из поступательного движения, при котором все точки фигуры движутся так же, как полюс A, и из вращательного движения вокруг этого полюса***.

Иными словами ***плоское движение можно считать состоящим из поступательного движения вместе с полюсом A и вращения вокруг оси перпендикулярной плоскости и проходящей через точку A***.

- ## Основные кинематические характеристики плоского движения и их зависимость от выбора полюса

Основными кинематическими характеристиками рассматриваемого движения являются – скорость и ускорение поступательного движения, равные скорости и ускорению полюса ($\boldsymbol{\upsilon}_{пост}=\boldsymbol{\upsilon}_A$, $\boldsymbol{a}_{пост}=\boldsymbol{a}_A$), а также угловая скорость со и угловое ускорение ее вращательного движения вокруг полюса. Значения этих характеристик в любой момент времени *t* можно найти, воспользовавшись уравнениями.



При изучении движения можно в качестве полюса выбирать любую точку фигуры. Рассмотрим, что получится, если вместо *A* выбрать в качестве полюса какую-нибудь другую точку *C* и определять положение фигуры отрезком CB_1, образующим с осью *Ox* угол φ_1.

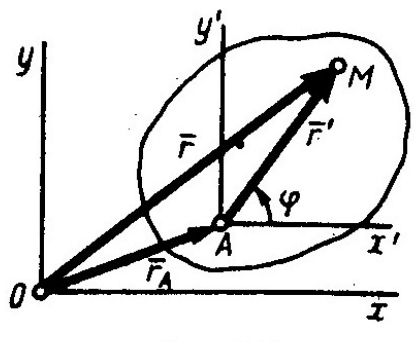
Характеристики поступательной части движения при этом изменятся, так как в общем случае $\boldsymbol{\upsilon}_C\neq\boldsymbol{\upsilon}_A$ и $\boldsymbol{a}_C\neq\boldsymbol{a}_A$ (иначе движение фигуры было бы поступательным). Характеристики же вращательной части движения, т. е. ω и ε, остаются неизменными. В самом деле, проведя из *C* прямую CB_1 параллельную *AB*, мы видим, что в любой момент времени угол $\varphi_1=\varphi-\alpha$, где α=*const*. Отсюда $\dot{\varphi}_1=\dot{\varphi}$, $\ddot{\varphi}_1=\ddot{\varphi}$ или $\omega_1=\omega$, $\varepsilon_1=\varepsilon$.

Следовательно, ***вращательная часть движения от выбора полюса не зависит***.

- ## Определение скоростей точек плоской фигуры

Ранее было отмечено, что движение плоской фигуры можно рассматривать как слагающееся из поступательного движения, при котором все точки фигуры движутся со скоростью υ_A полюса *A*, и из вращательного движения вокруг этого полюса. Покажем, что скорость любой точки *M* фигуры складывается геометрически из скоростей, которые точка получает в каждом из этих движений.

Положение любой точки M фигуры определяется по отношению к осям Oxy радиусом-вектором $\mathbf{r}=\mathbf{r}_A+\mathbf{r}'$, где $\mathbf{r}_A$ – радиус-вектор полюса A, $\mathbf{r}'=\boldsymbol{AM}$ – вектор, определяющий положение точки M относительно осей $Ax'y'$, перемещающихся вместе с полюсом A поступательно (движение фигуры по отношению к этим осям представляет собой вращение вокруг полюса A). Тогда



$$\boldsymbol{\upsilon}_M=\frac{d\mathbf{r}}{dt}=\frac{d\mathbf{r}_A}{dt}+\frac{d\mathbf{r}'}{dt}$$

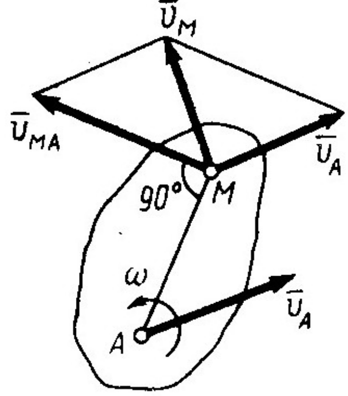
В полученном равенстве величина $d\mathbf{r}_A/dt=\boldsymbol{\upsilon}_A$ есть скорость полюса A; величина же $d\mathbf{r}'/dt$ равна скорости $\boldsymbol{\upsilon}_{MA}$, которую точка M получает при $\boldsymbol{r}_A=const$, т. е. относительно осей $Ax'y'$, или, иначе говоря, при вращении фигуры вокруг полюса A. Таким образом, из предыдущего равенства действительно следует, что

$$\boldsymbol{\upsilon}_M=\boldsymbol{\upsilon}_A+\boldsymbol{\upsilon}_{AM}$$

При этом скорость $\boldsymbol{\upsilon}_{MA}$, которую точка M получает при вращении фигуры вокруг полюса A, будет:

$$\upsilon_{AM}=\omega AM \quad \boldsymbol{\upsilon}_{AM}\perp \boldsymbol{AM}$$

где ω – угловая скорость фигуры.



Таким образом, с***корость любой точки М плоской фигуры геометрически складывается из скорости какой-нибудь другой точки А, принятой за полюс, и скорости, которую точка М получает при вращении фигуры вокруг этого полюса***. Модуль и направление скорости $\boldsymbol{\upsilon}_M$ находятся построением соответствующего параллелограмма.

Сформулированное утверждение называется ***теоремой сложения скоростей при плоском движении.***

- ## Теорема о проекции скоростей двух точек тела

Определение скоростей точек плоской фигуры (или тела, движущегося плоскопараллельно) с помощью общей теоремы сложения скоростей обычно с довольно сложными расчетами. Однако исходя из этого основного результата, можно получить ряд других, практически более удобных и простых методов определения скоростей точек фигуры (или тела).

Один из таких методов дает теорема: ***проекции скоростей двух точек твердого тела на ось, проходящую через эти точки, равны друг другу.***

Рассмотрим какие-нибудь две точки A и B плоской фигуры (или тела). Принимая точку A за полюс, получаем

$$\boldsymbol{\upsilon}_B=\boldsymbol{\upsilon}_A+\boldsymbol{\upsilon}_{AB}$$

Отсюда, проектируя обе части равенства на ось, направленную по AB, и учитывая, что вектор $\boldsymbol{\upsilon}_{BA}$ перпендикулярен AB; находим

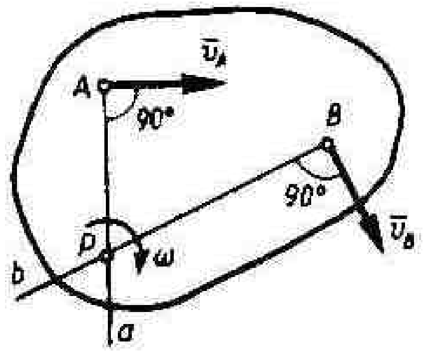
$$\upsilon_B \cos\beta = \upsilon_A \cos\alpha$$

и теорема доказана. Заметим, что этот результат ясен и из чисто физических соображений: если данная теорема не будет выполняться, то при движении расстояние между точками A и B должно изменяться, что невозможно, так как тело считается абсолютно твердым. Поэтому ***равенство проекций скоростей выполняется*** не только при плоскопараллельном, но ***и при любом движении твердого тела***.

• Понятие мгновенного центра скоростей

Мгновенным центром скоростей называется точка плоской фигуры, скорость которой в данный момент времени равна нулю.

Докажем ***теорему о существовании мгновенного центра скоростей.*** Пусть в момент времени t точки A и B плоской фигуры имеют скорости $\boldsymbol{\upsilon}_A$ и $\boldsymbol{\upsilon}_B$, не параллельные друг другу. Тогда точка P, лежащая на пересечении перпендикуляров Aa к вектору $\boldsymbol{\upsilon}_A$ и Bb к вектору $\boldsymbol{\upsilon}_B$, и будет мгновенным центром скоростей, так как $\boldsymbol{\upsilon}_P=0$. В самом деле, если допустить, что $\upsilon_P \neq 0$ то по теореме о проекциях скоростей вектор $\boldsymbol{\upsilon}_P$ должен быть одновременно перпендикулярен и AP, (так как $\boldsymbol{\upsilon}_A \perp AP$) и BP (так как $\boldsymbol{\upsilon}_B \perp BP$), что невозможно. Из той же теоремы видно, что никакая другая точка фигуры в этот момент времени не может иметь скорость, равную нулю.



Если теперь в момент времени t взять точку P за полюс, то по общей теореме сложения скоростей скорость точки A будет

$$\boldsymbol{\upsilon}_A = \boldsymbol{\upsilon}_P + \boldsymbol{\upsilon}_{PA} = (\boldsymbol{\upsilon}_P = 0) = \boldsymbol{\upsilon}_{PA}$$

Аналогичный результат получается для любой другой точки фигуры.

Следовательно, ***скорости точек плоской фигуры определяются в данный момент времени так, как если бы движение фигуры было вращением вокруг мгновенного центра скоростей.***

При этом согласно могут быть записаны следующие соотношения

$$\upsilon_{PA} = \omega PA \quad (\boldsymbol{\upsilon}_{PA} \perp PA)$$

$$\upsilon_{PB} = \omega PB \quad (\boldsymbol{\upsilon}_{PB} \perp PB)$$

Следовательно

$$\frac{\upsilon_{PA}}{PA} = \frac{\upsilon_{PB}}{PB}$$

т. е. можно сделать вывод, что ***скорости точек плоской фигуры пропорциональны их расстояниям от мгновенного центра скоростей.***

• Свойства мгновенного центра скоростеей

Доказанная в предыдущем параграфе теорема и следствия из нее позволяют сформулировать следующие основные свойства мгновенного центра скоростей

1. ***Для определения мгновенного центра скоростей надо знать только направления скоростей $\boldsymbol{\upsilon}_A$ и $\boldsymbol{\upsilon}_B$ каких-нибудь двух точек А и В плоской фигуры (или траектории этих точек)***; мгновенный центр скоростей находится в точке пересечения перпендикуляров, восставленных из точек A и B к скоростям этих точек (или к касательным к траекториям).

2. ***Для определения скорости любой точки плоской фигуры надо знать модуль и направление скорости какой-нибудь одной точки А фигуры и направление скорости другой ее точки В.*** Тогда, восставив из точек A и B перпендикуляры к $\boldsymbol{\upsilon}_A$ и $\boldsymbol{\upsilon}_B$, построим мгновенный центр скоростей P и по направлению $\boldsymbol{\upsilon}_A$ определим направление поворота фигуры. После этого, зная $\boldsymbol{\upsilon}_A$, найдем по формуле

$$\frac{\upsilon_{PA}}{PA} = \frac{\upsilon_{PB}}{PB} = \frac{\upsilon_{PM}}{PM}$$

скорость $\boldsymbol{\upsilon}_M$ любой точки M плоской фигуры. Направлен вектор $\boldsymbol{\upsilon}_M$ перпендикулярно PM в сторону поворота фигуры.

3. ***Угловая скорость ω плоской фигуры равна в каждый данный момент времени отношению скорости какой-нибудь точки фигуры к ее расстоянию от мгновенного центра скоростей Р***:

$$\omega = \frac{\upsilon_{PA}}{PA}.$$

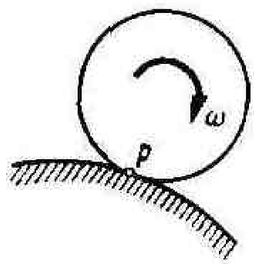
Найдем еще другое выражение для ω. Из общей теоремы сложения скоростей $\boldsymbol{\upsilon}_B = \boldsymbol{\upsilon}_A + \boldsymbol{\upsilon}_{AB}$ следует $\upsilon_{AB} = |\boldsymbol{\upsilon}_B - \boldsymbol{\upsilon}_A|$ кроме того $\upsilon_{AB} = \omega AB$ следовательно

$$\omega = \frac{|\boldsymbol{\upsilon}_B - \boldsymbol{\upsilon}_A|}{AB}$$

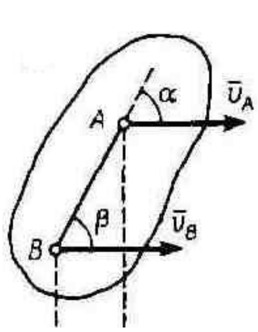
Когда $\boldsymbol{\upsilon}_A = 0$ (т.е. точка A — мгновенный центр скоростей), полученное соотношение переходит в аналогичное выражение выведенное через мгновенный цент скоростей.

• Частные случаи положения мгновенного центра скоростей

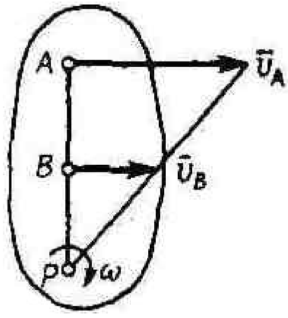
а) Если плоскопараллельное движение осуществляется путем качения без скольжения одного цилиндрического тела по поверхности другого неподвижного, то точка P катящегося тела, касающаяся неподвижной поверхности, имеет в данный момент времени вследствие отсутствия скольжения скорость, равную нулю ($\boldsymbol{\upsilon}_P$=0), и, следовательно, является мгновенным центром скоростей. Примером служит качение колеса по рельсу.



б) Если скорости точек A и B плоской фигуры параллельны друг другу, причем линия AB не перпендикулярна $\boldsymbol{\upsilon}_A$, то мгновенный центр скоростей лежит в бесконечности и скорости всех точек параллельны $\boldsymbol{\upsilon}_A$. При этом из теоремы о проекциях скоростей следует, что $\upsilon_B \cos\beta = \upsilon_A \cos\alpha$ т.е.



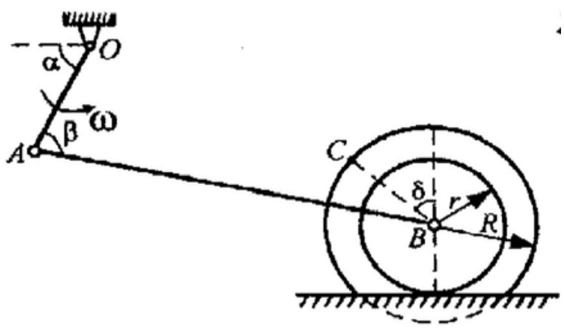
$υ_B = υ_A$; аналогичный результат получается для всех других точек. Следовательно, в рассматриваемом случае скорости всех точек фигуры в данный момент времени равны друг другу и по модулю, и по направлению, т. е. фигура имеет мгновенное поступательное распределение скоростей (такое состояние движения тела называют еще ***мгновенно поступательным***). Угловая скорость и тела в этот момент времени равна нулю.



в) Если скорости точек A и B плоской фигуры параллельны друг другу и при этом линия AB перпендикулярна $\mathbf{υ}_A$, то мгновенный центр скоростей P определяется построением, показанным на рисунке. В этом случае, в отличие от предыдущих, для нахождения центра P надо кроме направлений знать еще и модули скоростей $\mathbf{υ}_A$ и $\mathbf{υ}_B$.

г) Если известны вектор скорости $\mathbf{υ}_B$ какой-нибудь точки B фигуры и ее угловая скорость ω, то положение мгновенного центра скоростей P, лежащего на перпендикуляре к $\mathbf{υ}_B$, можно найти из равенства $PB = υ_B / ω$.

• Пример решения задачи



В четырехзвенном механизме кривошип OA длины 0.5 м вращается с постоянной угловой скоростью 2 рад/с. Определить угловую скорость шатуна AB, а также скорости точек B и C, если α=30°, β=60°, δ=45°, AB=1 м, R=0.5 м и r=0.3 м.

Лекция 4

Динамика точки.

Дифференциальные уравнения движения материальной точки.

- **Динамика как раздел механики**

Динамикой называется раздел механики, в котором ***изучается движение материальных тел под действием сил.***

С геометрической точки зрения движение материальных тел рассматривалось в кинематике. В динамике, в отличие от кинематики, при изучении движения тел принимают во внимание как действующие на них силы, так и ***инертность*** самих ***материальных тел***. При этом ***в динамике***, в отличии от статики, ***силы могут быть переменными***, т.е. менять модули и направления действия при движении тела. изменяются. Такие переменные силы могут определенным образом зависеть от времени, положения тела и его скорости.

Следует отметить, что все введенные в статике понятия и полученные там результаты относятся в равной мере и к переменным силам, так как условие постоянства сил нигде в статике не использовалось.

Инертность тела проявляется в том, что оно сохраняет свое движение при отсутствии действующих сил, а когда на него начинает действовать сила, то скорости точек тела изменяются не мгновенно, а постепенно и тем медленнее, чем больше инертность этого тела. ***Количественной мерой инертности материального тела*** является физическая величина, называемая ***массой тела***. В классической механике масса т рассматривается как величина скалярная, положительная и постоянная для каждого данного тела.

Кроме суммарной массы движение тела зависит еще в общем случае от формы тела, точнее от взаимного расположения образующих его частиц, т. е. от распределения масс в теле.

Чтобы при первоначальном изучении динамики отвлечься от учета формы тела (распределения масс), вводят абстрактное понятие ***о материальной точке, как о точке, обладающей массой,*** и начинают изучение динамики с динамики материальной точки.

Из кинематики известно, что движение тела слагается в общем случае из поступательного и вращательного. При решении конкретных задач материальное тело можно рассматривать как материальную точку в тех случаях, когда по условиям задачи допустимо не принимать во внимание вращательную часть движения тела.

Изучать динамику мы начнем с динамики материальной точки, так как естественно, что изучение движения одной точки должно предшествовать изучению движения системы точек и, в частности, твердого тела.

- **Законы динамики**

В основе динамики лежат законы, установленные путем обобщения результатов целого ряда опытных фактов и наблюдений. Систематически законы динамики были впервые изложены И. Ньютоном в его классическом сочинении «Математические начала натуральной философии», изданном в 1687 г. Сформулировать эти законы можно следующим образом.

Первый закон (закон инерции): изолированная от внешних воздействий материальная точка сохраняет свое состояние покоя или равномерного прямолинейного движения до тех пор, пока приложенные силы не заставят ее изменить это состояние.

Движение, совершаемое точкой при отсутствии сил, называется ***движением по инерции***.

Закон инерции отражает одно из основных свойств материи – пребывать, неизменно в движении. Важно отметить, что развитие динамики как науки стало возможным лишь после того, как Галилеем был открыт этот закон (1638 г.) и тем самым опровергнута господствовавшая со времен Аристотеля точка зрения о том, что движение тела может происходить только под действием силы.

Существенным является вопрос о том, по отношению к какой системе отсчета справедлив закон инерции. В связи с этим в механике вводят понятие о системе отсчета, в которой справедлив закон инерции, постулируют ее существование и называют ***инерциальной системой отсчета***.

Второй закон (основной закон динамики) устанавливает, как изменяется скорость точки при действии на нее какой–нибудь силы, а именно: произведение массы материальной точки на ускорение, которое она получает под действием данной силы, равно по модулю этой силе, а направление ускорения совпадает с направлением силы.

Математически этот закон выражается векторным равенством

$$m\boldsymbol{a} = \boldsymbol{F}$$

При этом между модулями ускорения и силы имеет место зависимость

$$ma = F$$

Второй закон динамики, как и первый, имеет место ***только по отношению к инерциальной системе отсчета***.

Из этого закона непосредственно видно, что мерой инертности материальной точки является ее масса, поскольку при действии данной силы точка, масса которой больше, т.е. более инертная, получит меньшее ускорение и наоборот.

Если на точку действует одновременно несколько сил, то они будут эквивалентны одной силе, т. е. равнодействующей $\boldsymbol{R}$, равной геометрической сумме данных сил. Уравнение, выражающее основной закон динамики, принимает в этом случае вид

$$m\boldsymbol{a} = \sum_k \boldsymbol{F}_k$$

Третий закон (закон равенства действия и противодействия) устанавливает характер механического взаимодействия между материальными телами. Для двух материальных точек он гласит: две материальные точки действуют друг на друга с силами, равными по модулю и направленными вдоль прямой, соединяющей эти точки, в противоположные стороны.

Данный закон играет большую роль в динамике системы материальных точек, как устанавливающий зависимость между действующими на эти точки внутренними силами.

• Задачи динамики

Для свободной материальной точки задачами динамики являются следующие:

- первая задача динамики: ***зная закон движения точки, определить действующую на нее силу***
- вторая или "основная" задача динамики: ***зная действующие на точку силы, определить закон движения точки***.

Для несвободной материальной точки, т. е. точки, на которую наложена связь, вынуждающая ее двигаться по заданной поверхности или кривой, первая задача динамики обычно состоит в том, чтобы, зная движение точки и действующие на нее активные силы, определить реакцию связи. Вторая (основная) задача динамики при несвободном движении распадается на две и состоит в том, чтобы, зная действующие на точку активные силы, определить: а) закон движения точки, б) реакцию наложенной связи.

• Основные виды сил

При решении задач динамики мы будем в основном рассматривать следующие постоянные или переменные силы.

Сила тяжести. Это постоянная сила ***P***, действующая на любое тело, находящееся вблизи земной поверхности. Модуль силы тяжести равен весу тела.

Опытом установлено, что под действием силы ***P*** любое тело при свободном падении на Землю (с небольшой высоты и в безвоздушном пространстве) имеет одно и то же ускорение ***g***, называемое ***ускорением свободного падения***. Тогда из второго закона Ньютона следует

$$P = mg$$

Сила трения. Так будем кратко называть силу трения скольжения, действующую (при отсутствии жидкой смазки) на движущееся тело. Ее модуль определяется равенством

$$F = fN$$

где f – кффициент трения, который будем считать постоянным; N – нормальная реакция.

Сила тяготения. Это сила, с которой два материальных тела притягиваются друг к другу по закону всемирного тяготения, открытому Ньютоном. Сила тяготения зависит от расстояния и для двух материальных точек с массами m_1 и m_2, находящихся на расстоянии r друг от друга, и выражается равенством

$$F = G\frac{m_1 m_2}{r^2}$$

где G – гравитационная постоянная (в СИ G=6.673x10^{-11} м^3/кг с^2).

Сила упругости. Эта сила тоже зависит от расстояния. Ее значение можно определить исходя из закона Гука, согласно которому напряжение (сила, отнесенная к единице площади) пропорционально деформации. В частности, для силы упругости пружины получается значение

$$F = c\lambda$$

где λ – удлинение (или сжатие) пружины; c – коэффициент жесткости пружины (в СИ измеряется в Н/м).

Сила вязкого трения. Такая сила, зависящая от скорости, действует на тело при его медленном движении в очень вязкой среде (или при наличии жидкой смазки) и может быть выражена равенством

$$R = \mu\upsilon$$

где υ – скорость тела; μ – коэффициент сопротивления.

Сила аэродинамического (гидродинамического) сопротивления. Эта сила тоже зависит от скорости и действует на тело, движущееся в такой, например, среде, как воздух или вода. Обычно ее величину выражают равенством

$$R = 0.5 c_x \rho S \upsilon^2$$

где ρ – плотность среды; S – площадь проекции тела на плоскость, перпендикулярную направлению движения (площадь миделя); c_x – безразмерный коэффициент сопротивления, определяемый обычно экспериментально и зависящий от формы тела и от того, как оно ориентировано при движении.

• Дифференциальные уравнения движения материальной точки

В основе решения задач динамики точки лежит использование второго закона динамики. Этот закон векторный, а значит нам надо перейти от векторной формы записи к скалярной, для чего в свою очередь необходимо конкретизировать вид используемой системы координат.

Уравнения движения в декартовых координатах. Рассмотрим материальную точку, движущуюся под действием сил $\boldsymbol{F}_1$, $\boldsymbol{F}_2$, …, $\boldsymbol{F}_n$ по отношению к инерциальной системе отсчета $Oxyz$. Проектируя обе части равенства $m\boldsymbol{a} = \sum\limits_k \boldsymbol{F}_k$ оси x, y, z и учитывая, что $a_x = d^2x/dt^2$ и т. д., получим:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = \sum_k F_{kx}, \quad m\frac{d^2y}{dt^2} = \sum_k F_{ky}, \quad m\frac{d^2z}{dt^2} = \sum_k F_{kz}$$

или

$$m\ddot{x} = \sum_k F_{kx}, \quad m\ddot{y} = \sum_k F_{ky}, \quad m\ddot{z} = \sum_k F_{kz}$$

Это и будут искомые уравнения, т. е. ***дифференциальные уравнения движения точки в прямоугольных декартовых координатах***. Так как действующие силы могут зависеть от времени, от положения точки и от скорости, то в общем случае правая часть каждого из уравнений может быть функцией этих переменных, т. е. t, x, y, z, υ_x, υ_y, υ_z одновременно.

Уравнения в проекциях на оси естественного трехгранника. Для получения этих уравнений спроектируем обе части равенства $m\boldsymbol{a} = \sum_k \boldsymbol{F}_k$ на оси $M\tau nb$, т. е. на касательную $M\tau$ к траектории точки, главную нормаль Mn и бинормаль Mb. Тогда, учитывая, что

$$a_\tau = \frac{d\upsilon}{dt}, \quad a_n = \frac{\upsilon^2}{\rho}, \quad a_b = 0$$

получим

$$m\frac{d\upsilon}{dt} = \sum_k F_{k\tau}, \quad m\frac{\upsilon^2}{\rho} = \sum_k F_{kn}, \quad 0 = \sum_k F_{kb}$$

Полученные уравнения, представляют собой ***дифференциальные уравнения движения точки в проекциях на оси естественного трехгранника***.

• Решение основной задачи динамики при прямолинейном движении точки

Движение материальной точки будет прямолинейным, когда действующая на нее сила (или равнодействующая приложенных сил) имеет постоянное направление, а скорость точки в начальный момент времени равна нулю или направлена вдоль силы.

Если при прямолинейном движении направить вдоль траектории координатную ось Ox, то движение точки будет определяться одним скалярным дифференциальным уравнением вида

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = \sum_k F_{kx} \quad m\ddot{x} = \sum_k F_{kx}$$

Данное уравнение называют дифференциальным уравнением прямолинейного движения точки. Иногда его удобнее заменить двумя уравнениями, содержащими первые производные:

$$m\frac{d\upsilon}{dt} = \sum_k F_{kx} \quad \frac{dx}{dt} = \upsilon$$

Т.о. решение основной задачи динамики сводится к тому, чтобы из данных уравнений, зная силы, найти закон движения точки, т. е. $x=f(t)$. Для этого надо проинтегрировать соответствующее дифференциальное уравнение второго порядка. При этом очевидно, что общее решение дифференциального уравнения второго порядка будет иметь вид

$$x = x(t, C_1, C_2),$$

где C_1 и C_2 – произвольные постоянные интегрирования.

Чтобы довести решение каждой конкретной задачи до конца, надо определить значения постоянных C_1 и C_2. Для этого используются ***начальные условия.***

Изучение всякого движения будем начинать с некоторого определенного момента времени, называемого ***начальным моментом***. От этого момента будем отсчитывать время движения, считая, что в начальный момент t=0. Обычно за начальный принимают момент начала движения под действием заданных сил. Положение, которое точка занимает в начальный момент, называется начальным положением, а ее скорость в этот момент – ***начальной скоростью***. Чтобы однозначно решить основную задачу динамики, надо кроме действующих сил знать еще начальные условия, т. е. положение и скорость точки в начальный момент времени.

В случае прямолинейного движения начальные условия задаются в виде

при $t = 0, \quad x = x_0, \quad \upsilon = \upsilon_0$

По начальным условиям можно определить конкретные значения постоянных C_1 и C_2 и найти частное решение дифференциального уравнения, задающее закон движения точки, в виде

$x = x(t, x_0, \upsilon_0)$.

В целом решение задач динамики точки путем интегрирования соответствующих дифференциальных уравнений движения, сводится к следующим операциям.

1. ***Составление дифференциального уравнения движения.*** Для его составления в случае прямолинейного движения надо:

а) выбрать начало отсчета (как правило, совмещая его с начальным положением точки) и провести координатную ось, направляя ее вдоль траектории и, как правило, в сторону движения; если под действием приложенных сил точка может находиться в каком–нибудь, положении в равновесии, то начало отсчета удобно помещать в положении статического равновесия;

б) изобразить движущуюся точку в произвольном положении (но так, чтобы было x>0 и υ>0; последнее существенно, когда среди сил есть силы, зависящие от скорости) и показать все действующие на точку силы;

в) подсчитать сумму проекций всех сил на координатную ось и подставить эту сумму в правую часть дифференциального уравнения движения; при этом надо обязательно все переменные силы выразить через те величины t, x или υ), от которых эти силы зависят.

2. ***Интегрирование дифференциального уравнения движения.***

3. ***Определение постоянных интегрирования.***

4. ***Нахождение искомых в задаче величин и исследование полученных результатов.***

В качестве иллюстрации намеченной схемы решения задачи рассмотрим конкретные задачи, в которых сила F, действующая на материальную точку массы m

1. является постоянной (F_0, начальные условия x_0, υ_0);
2. зависит от времени (F=F_0exp(–t/τ), начальные условия x_0, υ_0);
3. зависит от скорости (F=-$\mu\upsilon^2$, начальные условия x_0=0, $\upsilon_0\neq$0);
4. зависит от расстояния (F=kx^3, начальные условия x_0=0, υ_0=0).

Лекция 5

Теорема об изменении кинетической энергии

- **Кинетическая энергия материальной точки и механической системы**

Кинетической энергией мат. точки называется скалярная величина равная **половине произведения массы точки на квадрат скорости ее движения**

$$K = \frac{m\upsilon^2}{2}$$

Единицей измерения энергии является джоуль

$1\text{Дж} = 1\text{кг} * \text{м}^2/\text{с}^2$.

Данное соотношение естественным образом может быть обобщено и на систему материальных точек: кинетическая энергия системы – сумма кинетических энергий точек составляющих эту систему.

$$K = \frac{1}{2}\sum_k m_k \upsilon_k^2$$

Рассмотри в качестве механической системы твердое тело.

Поступательное движение

Все точки движутся с одинаковыми скоростями равными скорости центра масс тела, поэтому

$$K = \frac{1}{2}\sum_k m_k \upsilon_k^2 = \frac{\upsilon_C^2}{2}\sum_k m_k = \frac{M\upsilon_C^2}{2}$$

Вращательное движение

Скорость любой точки может быть определена через угловую скорость тела

$$K = \frac{1}{2}\sum_k m_k \upsilon_k^2 = \frac{1}{2}\sum_k m_k \omega^2 h_k^2 = \frac{\omega^2}{2}\sum_k m_k h_k^2 = \frac{\omega^2 J}{2}$$

Плоскопараллельное движение

Если в качестве полюса выбрать центр масс (C=P), то выражение для кинетической энергии принимает вид

$$K = \frac{M\upsilon_C^2}{2} + \frac{J_{Cz}\omega^2}{2},$$

где υ_C и J_{Cz} скорость центра масс и осевой момент инерции относительно ось проходящей через центр масс.

В качестве полюса также может быть рассмотрен и мгновенный центр скоростей (C_V=P). Тогда $\upsilon_{C_V} = 0$ и для кинетической энергии получаем

$$K = \frac{J_{C_V z}\omega^2}{2}.$$

При этом необходимо помнить, что в последнем случае ось вращения проходит через МЦС, а значит для осевого момента инерции может быть использована теорема Гюйгенса

$$J_{C_V z} = J_{Cz} + Mr^2_{CC_V}$$

Подставим это в выражение для кинетической энергии

$$K = \frac{J_{C_V z}\omega^2}{2} = \frac{\left(J_{Cz} + Mr^2_{CC_V}\right)\omega^2}{2} = \frac{J_{Cz}\omega^2}{2} + \frac{Mr^2_{CC_V}\omega^2}{2} = \frac{J_{Cz}\omega^2}{2} + \frac{M\upsilon_C^2}{2}.$$

Т.о. очевидно, что оба выражения являются эквивалентными.

• Работа силы. Мощность

Работа – характеристика действия, оказываемого силой на тело при некотором его перемещении.

Элементарной работой силы **F** приложенной в точке *M* называется скалярная величина

$$dA = F_\tau ds,$$

где *ds* – модуль элементарного перемещения точки *M*.

Если учесть, что $ds=|d\mathbf{r}|$, а $F_\tau=F\cos\alpha$, то последнее соотношение может быть записано как

$$\delta A = F_\tau ds = F\cos\alpha\left|d\mathbf{r}\right| = Fdr\cos\alpha = \mathbf{F}d\mathbf{r},$$

Т.о. элементарная работа равна скалярному произведению силы на вектор элементарного перемещения точки ее приложения. Из этого определения сразу следует, что работа равна нулю если линия действия силы и перемещение тела ортогональны. Пример такой силы – сила Лоренца, действующая на электрон в магнитном поле.

Согласно правилам раскрытия скалярного произведения для элементарной работы может быть записано следующее выражение

$$\delta A = F_x dx + F_y dy + F_z dz,$$

Все эти соотношения применимы лишь для элементарной работы, т.е. работы на бесконечно малом перемещении. Работа же на любом конечном перемещении равна взятому вдоль этого перемещения интегралу от элементарной работы

$$A_{(M_0M_1)} = \int\limits_{M_0}^{M_1} F_\tau ds = \int\limits_{M_0}^{M_1}(F_x dx + F_y dy + F_z dz),$$

Если сила постоянна по величине и направлению, а точка к которой приложена сила движется прямолинейно, то в этом случае

$$F_\tau = F\cos\alpha = const$$

и

$$A_{(M_0M_1)} = Fs_1\cos\alpha,$$

где s_1 – конечное перемещение.

Мощность – работа совершаемая силой в единицу времени («скорость работы»)

$$N=\frac{dA}{dt}=\frac{\mathbf{F}d\mathbf{r}}{dt}=\mathbf{F}\frac{d\mathbf{r}}{dt}=\mathbf{F}\boldsymbol{\upsilon}=F\upsilon\cos\alpha$$

В системе СИ работа измеряется 1 джоулях (1 Дж=1 кг м^2/с^2), а мощность в ваттах (1 Вт=1 Дж/с).

• Примеры вычисления работы

Работа силы тяжести.

Есть две точки $M_1(x_1,y_1,z_1)$ и $M_2(x_2,y_2,z_2)$. Ось z направим вверх. Тогда для силы тяжести имеем $P_x=P_y=0$, $P_z=-P$.

$$A_{(M_1M_2)}=\int_{M_1}^{M_2}(P_xdx+P_ydy+P_zdz)=\int_{z_1}^{z_2}P_zdz=-P(z_2-z_1)=P(z_1-z_2),$$

Т.о. работа силы тяжести равна плюс/минус весу тела умноженному на вертикальное перемещение тела. Знак плюс – если тело падает, минус – если подымается. Как видно, работа силы тяжести не зависит от вида траектории, а определяется только конечным и начальным положениями тела. Силы обладающее таким свойством называются **потенциальными**.

Работа силы упругости.

Рассмотрим свободные одномерные колебания. При выборе начала координат в положении статического равновесия для силы упругости может быть записано следующее выражение

$$F_x=-cx,\quad F_y=F_z=0$$

и тогда

$$A_{(M_1M_2)}=\int_{M_1}^{M_2}(F_xdx+F_ydy+F_zdz)=-c\int_{x_1}^{x_2}xdx=\frac{c}{2}(x_1^2-x_2^2)=\frac{c}{2}(\lambda_1^2-\lambda_2^2),$$

Можно показать, что эта формула допускает обобщение на случай не прямолинейного движения, т.е. сила упругости также потенциальна.

Работа силы трения скольжения.

$$F_{тр}=-fN$$

и

$$A_{(M_1M_2)}=\int_{M_1}^{M_2}F_{тр}ds=-\int_{M_1}^{M_2}fNds=\left|\begin{matrix}\text{если сила трения}\\ \text{постоянна}\end{matrix}\right|=-F_{тр}s$$

т.о. работа зависит от пройденного пути, т.е. от траектории, а значит сила трения непотенциальна.

Работа силы трения качения.

Если происходит качения без проскальзывания, то силы трения качения приложена в точке соприкосновения тела и плоскости, т.е. в точке МЦС. А т.к. скорость этой точки равна 0, то элементарное перемещение также 0 и работа равна нулю.

Работа силы, приложенной к вращающемуся телу.

$$dA=F_\tau ds=F_\tau hd\varphi=Md\varphi,$$

В случае постоянного момента имеем

$$A = M\varphi,$$

а мощность соответственно равна

$$N = M\omega.$$

• Теорема об изменении кинетической энергии точки

Рассмотрим производную от кинетической энергии точки

$$\frac{dK}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{m\upsilon^2}{2}\right) = \frac{m}{2}\frac{d\boldsymbol{\upsilon\upsilon}}{dt} = \frac{m}{2}\left(2\boldsymbol{\upsilon}\frac{d\boldsymbol{\upsilon}}{dt}\right) = m\boldsymbol{\upsilon}\mathbf{a} = \boldsymbol{\upsilon}(m\mathbf{a}) =$$

$$= \boldsymbol{\upsilon}\sum_k \mathbf{F}_k = \sum_k \boldsymbol{\upsilon}\mathbf{F}_k = \sum_k N_k(\mathbf{F}_k)$$

Полученное соотношение и выражает ***теорему об изменении кинетической энергии в дифференциальной форме*: производная от кинетической энергии по времени равна сумме мощностей сил действующих на материальную точку.**

Рассмотрим полученное соотношение как дифференциальное уравнение, разделим в нем переменные и проинтегрируем

$$\int dK = \int \sum_k N_k(\mathbf{F}_k)dt, \quad K - K_0 = \sum_k \int N_k(\mathbf{F}_k)dt = \sum_k A_k(\mathbf{F}_k)$$

Очевидно, что произвольная постоянная интегрирования в полученном соотношении имеет смысл начальной кинетической энергии. Само это соотношение выражает ***теорему об изменении кинетической энергии в интегральной форме*: изменение кинетической энергии равна сумме работ сил действующих на материальную точку.**

• Теорема об изменении кинетической энергии механической системы

Как было отмечено выше кинетическая энергия системы есть сумма кинетических энергий отдельных точек механической системы. Это позволяет записать следующее

$$K = \sum_i K_i, \quad \frac{dK}{dt} = \sum_i \frac{dK_i}{dt} = \sum_{i,k} N_{ik}(\mathbf{F}_{ik})$$

Учитывая что в механической системе силы могут быть разделены на внешние и внутренние получаем

$$\frac{dK}{dt} = \sum_k N_k^{(e)}(\mathbf{F}_k^{(e)}) + \sum_k N_k^{(i)}(\mathbf{F}_k^{(i)})$$

Производная от кинетической энергии по времени равна сумме мощностей всех внешних и внутренних сил действующих на механическую систему.

Аналогичным образом может быть проведено и обобщение на случай механической системы и интегральной формулировки теоремы

$$K - K_0 = \sum_k A_k^{(e)}(\mathbf{F}_k^{(e)}) + \sum_k A_k^{(i)}(\mathbf{F}_k^{(i)})$$

Изменение кинетической энергии равна сумме работ всех внешних и внутренних сил действующих на механическую систему.

Таким образом в отличии от изученных ранее теорем ***в теорему об изменении кинетической энергии входят внутренние силы.*** Наличие в формулировке теоремы внутренних сил существенно затрудняет ее использование при решении задач.

- ## Неизменяемая механическая система и система с идеальными связями

Как было подчеркнуто ранее включение в рассмотрение работ и мощностей внутренних сил существенно затрудняет применение теоремы об изменении кинетической энергии для решения задач. Поэтому, является целесообразным рассмотреть два важных частных случая механических систем.

1. Неизменяемая система.

Неизменяемая система – система, в которой **расстояние между каждыми двумя взаимодействующими точками остаются во все время движения постоянным**. Очевидно, что примером неизменяемой системы может служить твердое тело.

Можно показать, что в неизменяемой системе сумма работ, а значит и мощностей, всех внутренних сил равна нулю. Это позволяет записать теорему об изменении кинетической энергии в следующем виде

$$\frac{dK}{dt} = \sum_k N_k^{(e)}(\mathbf{F}_k^{(e)})$$

$$K - K_0 = \sum_k A_k^{(e)}(\mathbf{F}_k^{(e)})$$

2. Система с идеальными связями.

Система с идеальными связями – система в которой сумма работ всех реакций связей, не изменяющихся со временем, на элементарных перемещениях равна нулю. Т.о. ***изменение кинетической энергии системы с идеальными***, не изменяющимися со временем ***связями*** при любом ее перемещении ***равно сумме работ*** на этом перемещении приложенных к системе внешних и внутренних ***активных сил***.

Практическая ценность теоремы об изменении кинетической энергии состоит в том, что при неизменяющихся со временем идеальных связях она позволяет исключить из уравнений движения все наперед неизвестные реакции связей.